i Forside

Midtveiseksamen i MAT1110 24/3 2017

Midtveiseksamen MAT1110

Kalkulus og lineær algebra

24. mars 2017, kl. 09.00-11.00

Hjelpemidler: Ingen

Formelsamlingen er lagt opp som en PDF i oppgave 1 i oppgavesettet. Bla til oppgave 1 hvis du har behov for å konferere med formelsamlingen.

1 Sett B, oppgave 1

La $\mathbf{r}(t)$ være en kurve i $\mathbb{R}^3$ der $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.La F være en avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som er slik at$F'(\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sett $\mathbf{h}($

Velg ett alternativ

- $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $\mathbf{h}$ er ikke deriverbar for $t = 1$.
- $2\mathbf{j}$ ✔

Maks poeng: 1

2 Sett B, oppgave 2

Tangentplanet til ellipsoiden $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ i punktet $(x, y, z) = (1, 1, 1/2)$ har ligning:

Velg ett alternativ

- $z = 2 - \frac{x}{2} - y$
- $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}}$
- $z = \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4}$
- $z = 2 - x - \frac{y}{2}$ ✔
- $z = -2 + x + \frac{y}{2}$

Maks poeng: 1

3 Sett B, oppgave 3

La $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Hvilken av påstandene under er riktige?

Velg ett alternativ

- $A\mathbf{x} = 0$ har kun løsningene $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og $\mathbf{x} = (1, -5, 3)$.
- Alle punkter på den rette linja gjennom $(0, 0, 0)$ og $(1, -5, 3)$ er en løsning ✔ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $A\mathbf{x} = 0$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har ingen løsninger.
- Alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Maks poeng: 1

4 Sett B, oppgave 4

Egenverdiene til matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ er:

Velg ett alternativ

- $\{0, 1, 2\}$
- $\{0, 1, -2\}$
- $\{1, 2, 3\}$
- $\{0, 2\}$
- $\{-1, 0, 2\}$ ✔

Maks poeng: 1

5 Sett B, oppgave 5

La A være en $n \times n$ matrise. Anta at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har løsning for en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Hvilket av følgende utsagn er riktig:

Velg ett alternativ

- A er ikke inverterbar. ✔
- $A\mathbf{x} = -\mathbf{b}$ har kun en løsning.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en eller ingen løsning for alle $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.
- Søylene i A er lineært avhengige, men radene er lineært uavhengige.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Maks poeng: 1

6 Sett B, oppgave 6

Et kraftfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = y\cos(xy)\,\mathbf{i} + x\cos(xy)\,\mathbf{j}$. Da er en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$ gitt ved:
Velg ett alternativ

- $\sin(xy)$ ✔
- $-\frac{1}{2}x^2\cos(xy) + \frac{1}{2}y^2\cos(xy)$
- $\mathbf{F}$ har ingen potensialfunksjon.
- $\cos(xy)$
- $\cos(xy)\mathbf{i} + \sin(xy)\mathbf{j}$

Maks poeng: 1

7 Sett B, oppgave 7

La C_1 være en kontinuerlig deriverbar kurve i $\mathbb{R}^n$ gitt ved $\mathbf{r}(t)$, $t \in [0,1]$.La C_2 være kurven gitt ved $\{\mathbf{r}(1-t) \mid t \in [0,1]\}$ Hvilken av påstandene
Velg ett alternativ

- $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle glatte funksjoner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ for alle glatte funksjoner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- $\int_{C_1} f\,ds = \int_{C_2} f\,ds = 0$ for alle glatte funksjoner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- $\int_{C_1} f\,ds = -\int_{C_2} f\,ds$ for alle glatte funksjoner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- $\int_{C_1} f\,ds = \int_{C_2} f\,ds$ for alle glatte funksjoner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ✔

Maks poeng: 1

8 Sett B, oppgave 8

Hvilket kjeglesnitt beskriver ligningen $x^2 - 2x + 4y^2 + 16y + 13 = 0$?
Velg ett alternativ

- De rette linjene $x = 1 \pm \sqrt{3}(y+2)$.
- En ellipse med sentrum $(1,-2)$ og brennpunkter $(1 \pm \sqrt{3}, -2)$. ✔
- En parabel med toppunkt $(1,-2)$ og brennpunkt $(1+\sqrt{3},-2)$, og styringslinje $x = 1-\sqrt{3}$.
- En hyperbel med sentrum $(1,-2)$ og brennpunkter $(1 \pm \sqrt{3}, -2)$.
- En sirkel med sentrum $(1,-2)$ og radius $\sqrt{3}$.

Maks poeng: 1

9 Sett B, oppgave 9

Ligningssystemet $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ har løsning:

Velg ett alternativ

- $x = 2,\ y = 1,\ z = -1.$ ✔
- $x = 1 + z,\ y = 1 - 2z,\ z$ fri.
- Systemet har ingen løsninger.
- $x = 2 - 2y - 3z,\ y$ og z frie.
- $x = 2 - 2z,\ y = 1 - z,\ z$ fri.

Maks poeng: 1

10 Sett B, oppgave 10

La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}y, \sqrt{x^2 + y^2}x)$. Da er $\mathbf{F}'(x, y) =$

Velg ett alternativ

- $\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$
- F er ikke deriverbar.
- $\begin{pmatrix} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$ ✔
- $\begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$
- $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + xy$

Maks poeng: 1

11 Sett B, oppgave 11

La C være kurven $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j},\ t \in [0, 2\pi]$, og la $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+4y^2}}$. Da blir $\int_C f\,ds$ lik:

Velg ett alternativ

- $(2\pi)^2$
- 2π ✔
- 0
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
- $\sqrt{2\pi}$

Maks poeng: 1

12 Sett B, oppgave 12

La matrisen A være gitt ved $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$, der a er en konstant. Hvilken av påstandene under er riktige:

Velg ett alternativ

- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har ingen løsninger for noen $\mathbf{b}$ dersom $a = 0$.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger for alle $\mathbf{b}$ dersom $a = 0$.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsninger kun hvis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger dersom $a = 0$. ✔
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for alle a.

Maks poeng: 1

13 Sett B, oppgave 13

Sett $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Da er $A^{10}\mathbf{c}$ lik

Velg ett alternativ

- $\begin{pmatrix} 2^{10} \\ 5^{10} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ✔

Maks poeng: 1

14 Sett B, oppgave 14

Hvilken av matrisene under er ikke på trappeform:
Velg ett alternativ

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✔
- (1)
- (0)
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Maks poeng: 1

15 Sett B, oppgave 15

La $\mathcal{C}$ være kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = ((1-t^2)\cos(t), (1-t^2)\sin(t), t) \in \mathbb{R}^3$ for $t \in [-1, 1]$.
Den rette linja som er tangent til $\mathcal{C}$ i punktet $(1, 0, 0)$ har parameterframstilling:
Velg ett alternativ

- $\mathbf{l}(\tau) = (1, \tau, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$ ✔
- $\mathbf{l}(\tau) = (0, 1, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{l}(\tau) = (\tau, 1, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{l}(\tau) = (0, \tau, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{l}(\tau) = (\tau, \tau, \tau),\ \tau \in \mathbb{R}$

Maks poeng: 1

16 Sett B, oppgave 16

La A og B være $n \times n$ matriser, der B er en trappematrise.Anta at A er radekvivalent med B; mao. $A \sim B$.Da vet vi at:
Velg ett alternativ

- $\det(A)$ har samme fortegn som $\det(B)$
- $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ medfører at $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$
- $\det(A) = \det(B)$
- $\det(A) = 0$ hvis og bare hvis $\det(B) = 0$ ✔
- $\det(AB) \neq 0$

Maks poeng: 1

17 Sett B, oppgave 17

La C være kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}$, $t \in [0, \pi]$,og $\mathbf{F}$ være vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$.Da blir $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lik:

Velg ett alternativ

- $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$
- $\mathbf{0}$
- π
- $2\,\mathbf{j}$
- $-\pi$ ✔

Maks poeng: 1

Question 1
Attached



FORMELSAMLING FOR MAT 1110

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Integraler

$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0$
$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$

$$\int \cos^2 x \, dx = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\sin x \cos x + C$$
$$\int \tfrac{1}{\sin x} \, dx = \ln\left|\tfrac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$$
$$\int \tfrac{1}{\cos x} \, dx = \ln\left|\tfrac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C$$
$$\int \sin^n x \, dx = -\tfrac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \tfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \, dx$$
$$\int \cos^n x \, dx = \tfrac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \tfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \, dx$$
$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \tfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$
$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \tfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$$

Rekker

Taylorrekken til f om a: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Geometriske rekker: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, konvergensområde $(-1, 1)$

Binomiske rekker: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, konvergensradius 1 for $\alpha \notin \mathbf{N}$

Noen Taylorrekker: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x^n}{n}, \text{ konvergensområde } [-1, 1)$$
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ konvergensområde } [-1, 1]$$

Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Funksjoner av flere variable

Gradienten: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$

Kjerneregelen. På matriseform: $\mathbf{H}'(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{G}'(\mathbf{a})$

På komponentform: $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})$

Linearisering av F: $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{a})$

Normalvektor: $\mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Tangentplan: $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

Newtons metode: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$

Annenderiverttesten: Anta at (a, b) er et stasjonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$, $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Da gjelder:
i) Hvis $D < 0$, er (a, b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimum.

Lagranges multiplikatormetode: $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{a}) \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{a})$ (eller gradientene på høyre side lineært avhengige).

Derivasjon av omvendt funksjon: $(\mathbf{F}^{-1})'(\mathbf{y}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x})^{-1}$ der $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Derivasjon av implisitt funksjon: Hvis $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$, så $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}$

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Hastighet: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$

Fart: $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}$

Akselerasjon: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), \ldots, x_n''(t))$

Banekselerasjon: $a(t) = v'(t)$

Buelengde: $s = L(a, b) = \int_a^b v(t)\, dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$

Linjeintegral av skalarfelt: $\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) v(t)\, dt$

Linjeintegral av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)\, dt$

Integral av gradient: $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$

Nødvendig betingelse for konservativt felt: $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ alle $\mathbf{x}, i, j$.

Multiple integraler

Skifte av variabel: $\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \, dudv$

Polarkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, Jacobideterminant: r

Sylinderkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$, Jacobideterminant: r

Kulekoordinater: $x = \rho \sin\phi \cos\theta, y = \rho \sin\phi \sin\theta, z = \rho \cos\phi$,
Jacobideterminant: $\rho^2 \sin\phi$

Flateintegral: Generelt: $\int_S f \, dS = \iint_R f(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$

For $z = g(x,y)$: $\int_S f \, dS = \iint_R f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2} \, dxdy$

Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_C P \, dx + Q \, dy$

Kjeglesnitt

Parabel: $(y-n)^2 = \pm 4a(x-m)$ eller $(x-m)^2 = \pm 4a(y-n)$, brennvidde: $a > 0$

Ellipse: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, brennvidde: $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$

Hyperbel: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ eller $\frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(x-m)^2}{a^2} = 1$,
brennvidde: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, asymptoter: $y - n = \pm \frac{b}{a}(x-m)$

Vektorregning og determinanter

Vektorprodukt: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2 \, , a_3b_1 - a_1b_3 \, , a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regneregler for determinanter: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $\det(A^T) = \det(A)$

Matriser og lineæravbildninger

Def. av lineæravbildning: (i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$, (ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$

Def. av affinavbildning: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$

Matrisen til en lineæravbildning T: $A = (\mathbf{T}(\mathbf{e}_1), \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_n))$

Egenvektor v og egenverdi λ: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Betingelse for egenverdi: $\det(\lambda I_n - A) = 0$