Løsningsforslag til eksamen i MAT1110, 13/6-07

Oppgaveteksten er gjengitt i kursiv.

Oppgave 1:
a) Finn de stasjonære (kritiske) punktene til $f(x,y) = 2x^2y + 4xy - y^2$.

Løsning: Finner først de partiellderiverte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4xy + 4y = 4y(x+1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x^2 + 4x - 2y\end{aligned}$$

Vi er interessert i punktene der begge disse uttrykkene er lik 0. Det første uttrykket er null dersom enten $y = 0$ eller $x = -1$. Setter vi disse verdiene inn i det andre uttrykket, får vi:

For $y = 0$: Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 2x^2 + 4x - 2 \cdot 0 = 2x(x+2)$$

som er null dersom $x = 0$ eller $x = -2$. Dermed har vi funnet to stasjonære punkter $(0,0)$ og $(-2,0)$.

For $x = -1$: Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,y) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 2 \cdot y = -2 - 2y$$

som er null når $y = -1$. Dermed har vi funnet ett stasjonært punkt til: $(-1,-1)$.

Oppsummering: Vi har tre stasjonære punkter $(0,0)$, $(-2,0)$ og $(-1,-1)$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkt, lokale minimumspunkt eller sadelpunkt.

Løsning: Vi skal bruke annenderiverttesten og må først finne de annenderiverte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 4y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 4x + 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -2\end{aligned}$$

Ser på de tre stasjonære punktene hver for seg:

Punktet $(0,0)$: I dette punktet er $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4 \cdot 0 = 0$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 4 \cdot 0 + 4 = 4$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2$ og $D = AC - B^2 = 0 \cdot (-2) - 4^2 = -16$. Siden $D < 0$, er $(0,0)$ et sadelpunkt.

Punktet $(-2,0)$: I dette punktet er $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,0) = 4 \cdot 0 = 0$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2,0) = 4 \cdot (-2) + 4 = -4$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,0) = -2$ og $D = AC - B^2 = 0 \cdot (-2) - (-4)^2 = -16$. Siden $D < 0$, er $(-2,0)$ et sadelpunkt.

Punktet $(-1,-1)$: I dette punktet er $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 4 \cdot (-1) = -4$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,-1) = 4 \cdot (-1) + 4 = 0$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -2$ og $D = AC - B^2 = (-4) \cdot (-2) - 0^2 = 8$. Siden $D > 0$ og $A < 0$, er $(-1,-1)$ et lokalt maksimumspunkt.

Oppgave 2:
a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.2 & 1.1 \end{pmatrix}$$

Løsning: Vi finner først egenverdiene fra ligningen:

$$0 = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & \lambda - 1.1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 0.91$$

Dette er en annengradsligning med løsninger

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.91}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0.36}}{2} = \frac{2 \pm 0.6}{2} = 1 \pm 0.3$$

som gir egenverdiene $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 0.7$.

Neste trinn er å finne egenvektorene. En egenvektor $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = 1.3$, må tilfredsstille:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.2 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dette gir ligningene

$$-0.4x + 0.4y = 0$$

$$0.2x - 0.2y = 0$$

Siden vi får den første ligningen ved å multiplisere den andre med -2, har disse ligningene de samme løsningene. Velger vi $y = 1$, får vi $x = 1$, og dermed er $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en egenvektor med egenverdi $\lambda_1 = 1.3$.

Tilsvarende ser vi at hvis $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi $\lambda_1 = 0.7$, så er:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ \\ 0.2 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = 0.7 \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}$$

Dette gir ligningene

$$0.2x + 0.4y = 0$$

$$0.2x + 0.4y = 0$$

som opplagt har de samme løsningene. Velger vi $y = -1$, får vi $x = 2$, og dermed er $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en egenvektor med egenverdi $\lambda_2 = 0.7$.

b) En storby og de omliggende områdene vokser kraftig. Man regner at dersom det bor x_n millioner i byen og y_n millioner i de omliggende områdene ett tiår, vil de tilsvarende tallene ti år senere være

$$x_{n+1} = 0.9x_n + 0.4y_n$$

$$y_{n+1} = 0.2x_n + 1.1y_n$$

Dersom det i år bor $x_0 = 6$ millioner i byen og $y_0 = 3$ millioner i områdene omkring, hvor mange vil det da bo i byen og de omliggende områdene om n tiår?

Løsning: Vi begynner med å skrive begynnelsestilstanden som en lineærkombinasjon av egenvektorene, dvs. vi ønsker å finne tall s og t slik at:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dette gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} s + 2t &= 6 \\ s - t &= 3 \end{aligned}$$

som har løsningene $s = 4$, $t = 1$. Dermed har vi

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 4A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot A^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1.3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.7^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

som gir

$$x_n = 4 \cdot 1.3^n + 2 \cdot 0.7^n$$

innbyggere i byen og

$$y_n = 4 \cdot 1.3^n - 0.7^n$$

innbyggere i de omliggende områdene.

Oppgave 3:
a) Finn konvergensområdet til rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Løsning: Bruker først forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+2}}{2n+3}}{\frac{x^{2n}}{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)x^2}{(2n+3)} \right| = x^2$$

Dette gir konvergens for $x^2 < 1$, dvs. for $-1 < x < 1$, og divergens for $x^2 > 1$, dvs. for $x < -1$ og $x > 1$. Endepunktene må sjekkes separat:

$x = 1$: Vi får rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ som divergerer (du kan f.eks. sammenligne med rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$).

$x = -1$: Vi får rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ som divergerer (samme rekke som ovenfor).

Konvergensområdet er dermed $(-1, 1)$.

b) Finn summen til rekken.

Løsning: Vi setter $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ for $x = (-1, 1)$. Ganger vi denne ligningen med x, får vi $xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ som etter derivasjon gir

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

der vi har summert en geometrisk rekke med kvotient x^2. Integrerer vi på begge sider av likheten, får vi (integralet du trenger er på formelarket):

$$xS(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C$$

for et passende valg av integrasjonskonstanten C. For å finne riktig valg av C, setter vi inn $x = 0$ på begge sider, og får:

$$0 \cdot 1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{0+1}{0-1} \right| + C$$

Siden $\ln 1 = 0$, ser vi at må velge $C = 0$.

Dermed har vi $xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, og for $x \neq 0$, gir dette $S(x) = \frac{1}{2x}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. Fra det opprinnelige rekkeuttrykket for S ser vi at $S(0) = 1$, og dermed har vi

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| & \text{for } 0 < |x| < 1 \\ \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Oppgave 4: *R er rektangelet med hjørner i $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(1,2)$, og $\mathcal{C}$ er omkretsen til R orientert mot klokken. Finn $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ der*

$$\mathbf{F}(x,y) = (xy^2 - y)\,\mathbf{i} + (x^2y + x)\,\mathbf{j}$$

Løsning: Det enkleste er å bruke Greens teorem med $P = xy^2 - y$ og $Q = x^2y + x$. Vi får

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy =$$

$$\iint_R \big((2xy+1) - (2xy-1)\big)\,dxdy = \iint_R 2\,dxdy = 2\cdot\text{areal}(R) = 4$$

Oppgave 5:

a) Vis at volumet til området avgrenset av planet $2x + 4y - z = -4$ og paraboloiden $z = x^2 + y^2$ er gitt ved

$$V = \iint_D \left(2x + 4y - x^2 - y^2 + 4\right)\,dA$$

der D er sirkelen med sentrum i $(1,2)$ og radius 3.

Løsning: Området er avgrenset ovenfra av planet og nedenfra av paraboloiden (lag en tegning). Volumet er derfor gitt ved

$$V = \iint_D \big((2x + 4y + 4) - (x^2 + y^2)\big)\,dA = \iint_D \left(2x + 4y - x^2 - y^2 + 4\right)\,dA$$

der D er projeksjonen av området ned i xy-planet. Skjæring mellom de to flatene har vi når de to z-verdiene er like, dvs. når

$$x^2 + y^2 = 4 + 2x + 4y \iff x^2 - 2x + y^2 - 4y = 4 \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

Dette er ligningen for en sirkel med sentrum i $(1,2)$ og radius 3, og området D er avgrenset av denne sirkelen.

b) *Regn ut V.*

Løsning: Vi bruker polarkoordinater med sentrum i $(1,2)$, dvs. vi setter $x = 1 + r\cos\theta, y = 2 + r\sin\theta$. Jacobideterminaten er r som for vanlige polarkoordinater. Vi legger også merke til at integranden kan omskrives slik:

$$2x+4y-x^2-y^2+4 = -(x^2-2x+y^2-4y-4) = -\big((x-1)^2+(y-2)^2-9\big) =$$
$$= -\big((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2-9\big) = 9-r^2$$

Dermed har vi

$$V = \int_0^3\int_0^{2\pi}(9-r^2)r\;d\theta dr = 2\pi\int_0^3(9r-r^3)\;dr =$$
$$= 2\pi\left[\frac{9}{2}r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81\pi}{2}$$

Oppgave 6: *En $n \times n$-matrise A kalles radstokastisk dersom alle elementene er positive og summen av hver rad er 1, altså dersom*

(i) $a_{ij} \geq 0$ *for alle* i, j

(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 1$ *for alle* i

Vis at dersom A er radstokastisk, så er

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

en egenvektor for A. Hva er egenverdien?

Vi skal nå vise at dersom λ er en (annen) egenverdi for A, så er $|\lambda| \leq 1$. Velg en tilhørende egenvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Dersom v_i er komponenten med størst tallverdi, forklar at

$$|\lambda||v_i| = |\lambda v_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|v_i| = |v_i|$$

(du må forklare hvert steg i utregningen). Forklar også at dette viser at $|\lambda| \leq 1$.

Løsning: Dersom

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

har vi

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 1 + \cdots + a_{1n} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 1 + \cdots + a_{2n} \cdot 1 \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot 1 + a_{n2} \cdot 1 + \cdots + a_{nn} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{v}$$

som viser at $\mathbf{v}$ er en egenvektor med egenverdi 1.

Dersom

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

er en egenvektor med egenverdi λ, har vi $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Ser vi på den i-te komponenten i denne ligningen, får vi

$$\lambda v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

Tar vi tallverdien på begge sider og bruker at tallverdien til et produkt er produktet av tallverdiene, får vi

$$|\lambda||v_i| = |\lambda v_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j|$$

Bruker vi trekantulikheten pluss at $a_{ij} \geq 0$, får vi videre

$$|\lambda||v_i| = |\lambda v_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} v_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_j|$$

Siden $|v_j| \leq |v_i|$ for alle j, er

$$|\lambda||v_i| = |\lambda v_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} v_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_i|$$

Siden $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, får vi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_i| = |v_i| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = |v_i|$, og dermed har vi vist at

$$|\lambda||v_i| = |\lambda v_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_i| = |v_i|$$

Det betyr spesielt at $|\lambda||v_i| \leq |v_i|$, og deler vi på $|v_i|$, får vi $|\lambda| \leq 1$ ($v_i \neq 0$ siden ikke alle komponentene i en egenvektor kan være 0).