Eksamen i MAT 1110, Våren 2006, Utsatt prøve

Oppgave 1: I denne oppgaven er C matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a^2-3 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -a^2+3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

der a er et reelt tall.

a) Bruk elementære radoperasjoner til å redusere C til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Vi lar $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & a^2-3 & a \\ 1 & -a^2+3 & -1 \end{bmatrix}$ og $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ slik at C er matrisen $C = [A, I]$. For hvilke verdier av a har søylerommet til A dimensjon én, to og tre? Finn en basis for søylerommet når det har dimensjon 2.

c) Bruk resultatet i a) og elementære radoperasjoner til å finne den inverse matrisen til A når $a = 0$.

Oppgave 2: Regn ut

$$\iiint_R \sqrt{x^2+y^2}\, dV$$

der $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

Oppgave 3: a) En ellipse har ligningen

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$$

Finn sentrum og halvaksene til ellipsen, og lag en skisse av ellipsen i koordinatsystemet.

b) Vis at

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t)\,\mathbf{i} + (-2 + 3\sin t)\,\mathbf{j} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

er en parametrisering av ellipsen i a). Regn ut $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der

$$\mathbf{F}(x,y) = y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

og der C er ellipsen med positiv orientering.

c) Regn ut

$$\iint_R (1 - 2y)\, dA$$

der R er området avgrenset av ellipsen.

Oppgave 4: a) Vis at Taylorrekken i $a = 0$ til funksjonen $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}$ er lik

$$1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + 3\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}x^n$$

b) Finn konvergensområdet til rekken

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}x^n$$

Oppgave 5: M er en delmengde av $\mathbb{R}^n$. Det *ortogonale komplementet* $M^\perp$ inneholder de vektorene i $\mathbb{R}^n$ som står normalt på *alle* vektorene i M, dvs.

$$M^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{z} = 0 \text{ for alle } \mathbf{z} \in M\}$$

Vis at $H = M^\perp$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.