Optimering av funksjoner av flere variable

av

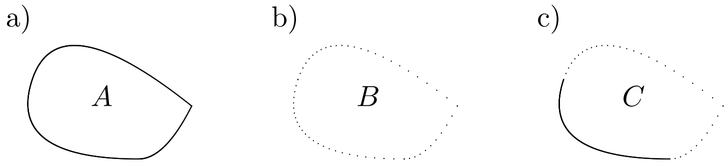
Tom Lindstrøm
Matematisk insitutt/CMA
Universitetet i Oslo

Dette notatet gir en kortfattet innføring i maksimums- og minimumsproblemer for funksjoner av flere variable. I den første seksjonen ser vi på vanlige optimeringsproblemer og i den andre på optimeringsproblemer med bibetingelser (Lagranges multiplikatormetode). Teksten er i hovedsak hentet fra kompendiet *Flervariabel analyse med lineær algebra*, men jeg har utelatt de fleste bevisene og en del videregående eksempler.

La oss aller først definere det vi er på jakt etter. Dersom $f : A \to \mathbb{R}$ er en funksjon av m variable, sier vi at $\mathbf{a} \in A$ er et *(globalt) maksimumspunkt* for f i A dersom $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in A$. Tilsvarende kaller vi $\mathbf{a} \in A$ et *(globalt) minimumspunkt* for f i A dersom $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in A$. Vi bruker *ekstremalpunkt* som er fellesnavn på maksimumspunkter og minimumspunkter.

1 Maksimums- og minimumsproblemer

Før vi ser på metoder for å finne maksimums- og minimumspunkter for funksjoner av flere variable, skal vi kaste et raskt blikk på et teorem som garanterer eksistensen av slike punkter under visse forutsetninger. Fra teorien for funksjoner av én variabel kjenner vi ekstremalverdisetningen (se setning 5.3.5 i *Kalkulus*) som sier at en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset *intervall* alltid har maksimums- og minimumspunkter. Det finnes en tilsvarende ekstremalverdisetning for funksjoner av flere variable. Den sier at alle kontinuerlige funksjoner definert på lukkede, begrensede *mengder* har maksimums- og minimumspunkter.



Figur 1: En lukket og to ikke-lukkede mengde

For å forstå denne setningen fullt ut må vi vite hva det vil si at en mengde $A \subset \mathbb{R}^m$ er lukket og begrenset. Begrensethet er lett å forklare: $A \subset \mathbb{R}^m$ er *begrenset* dersom de finnes et tall $K \in \mathbb{R}$ slik at $|\mathbf{x}| \leq K$ for alle $\mathbf{x} \in A$. Lukkethet er litt vanskeligere å beskrive, men figur 1 viser den intuitive ideen: De tre mengdene i a), b) og c) er nesten like, den eneste forskjellen er at i a) hører alle punktene på randen ("kanten") til mengden med til mengden, i b) hører ingen av punktene på randen med til mengden, og i c) hører bare noen av punktene på randen med til mengden. Den første mengden er lukket, de andre er det ikke.

For å få en presis beskrivelse av lukkede mengder definerer vi først begrepet randpunkt. Et punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ er et *randpunkt* for mengden $A \subset \mathbb{R}^m$ dersom enhver kule $B(\mathbf{a}, r)$ med sentrum i $\mathbf{a}$ inneholder både punkter som er med i A og punkter som ikke er med i A. Mengden A er *lukket* dersom den inneholder alle sine randpunkter.

Setning 1.1 (Ekstremalverdisetningen) *Anta at A er en lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$ og at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da har f minimumspunkter og maksimumspunkter i A.*

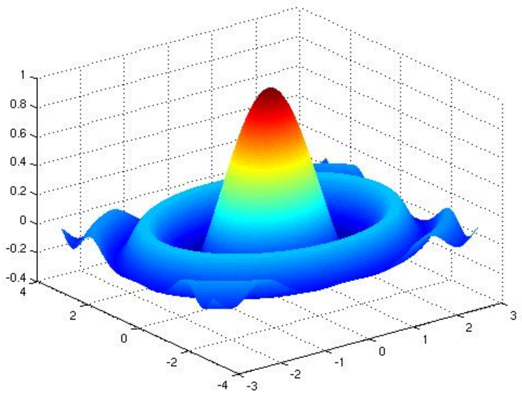
Ekstremalverdisetningen er hovedsakelig et teoretisk verktøy, men den har også en viss praktisk nytte når vi skal argumentere for at punkter vi tror muligens kan være ekstremalpunkter, virkelig er det. For å finne frem til disse "mulige ekstremalpunktene" trenger vi imidlertid andre teknikker. Før vi beskriver dem, kan det være nyttig å minne om hvordan vi finner ekstremalpunktene til funksjoner av én variabel.

Det første vi gjør er å lete etter *lokale* maksimums- og minimumspunkter ved å derivere funksjonen og finne alle punkter der den deriverte er 0. Deretter undersøker vi hva slags punkter vi har funnet ved enten å se på fortegnskiftet til den førstederiverte eller på fortegnet til den annenderiverte. Til slutt sammenligner vi funksjonsverdiene i de lokale maksimums- og minimumspunktene for å finne de globale ektremalpunktene vi egentlig er på jakt etter.

Vi skal følge akkurat samme strategi i det flervariable tilfellet, men siden geometrien er rikere, blir teknikkene litt mer kompliserte. La oss begynne med å definere de *lokale* ekstremalpunktene som vi først skal lete etter (husk at *snittet* $C \cap D$ av to mengder C og D består av de punktene som er med i *både* C og D):

Definisjon 1.2 *La $f \colon A \to \mathbb{R}$ være en funksjon av m variable. Vi sier at $\mathbf{a} \in A$ er et* lokalt maksimumspunkt *for f dersom det finnes en kule $B(\mathbf{a}, r)$ med sentrum i $\mathbf{a}$ slik at $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r) \cap A$. Tilsvarende kalles $\mathbf{a}$ et* lokalt minimumspunkt *dersom det finnes en kule $B(\mathbf{a}, r)$ slik at $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r) \cap A$. Vi bruker* lokale ekstremalpunkter *som et fellesnavn på lokale maksimums- og minimumspunkter.*

Lokale maksimumspunkter ser litt forskjellig ut ettersom de er indre punkter eller randpunkter. Figur 2 viser noen av mulighetene. Et lokalt maksimum i det indre kan f.eks. være en "fjelltopp" som den høyeste toppen på figuren, eller det kan være et punkt på en "åskam" som de andre lokale maksimumspunktene i det indre. Det er lett å forstille seg at i begge disse tilfellene må alle de partiellderiverte i punktet være lik 0. Dette behøver imidlertid ikke være tilfellet for lokale maksimumspunkter på randen til området. Grafen i figur 2 har lokale maksimumspunkter i hjørnene av definisjonsområdet (de fire "flippene" i kanten av figuren), men de partiellderiverte i disse punktene er ikke 0 — punktene ligger i en "skråning" der funksjonen hadde fortsatt å stige hvis den var blitt forlenget på naturlig måte utover sitt definisjonsområde.



Figur 2: Lokale ekstremalpunkter i det indre og på randen

I denne seksjonen skal vi stort sett konsentrere oss om jakten på lokale ekstremalpunkter i det indre av definisjonsområdet. I neste seksjon skal vi se på en teknikk som (blant annet) kan brukes til å finne mulige ekstremalpunkter på randen. La oss først vise at det virkelig er tilfellet at de partiellderiverte er null i alle lokale ekstremalpunkter i det indre av området.

Setning 1.3 *Anta at en funksjon $f\colon A \to \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum eller minimum i et indre punkt $\mathbf{a}$. Dersom f er deriverbar i $\mathbf{a}$, må $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, dvs. at $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$ for alle i.*

Bevis: Vi fører resultatet tilbake til det tilsvarende resultatet for funksjoner av én variabel (*Kalkulus*, setning 6.2.1). Anta at f har et lokalt maksimum i $\mathbf{a} = (a_1, a_1, \ldots, a_m)$ (beviset for et lokalt minimum er helt tilsvarende). La g være funksjonen av én variabel definert ved

$$g(x_i) = f(a_1, a_2, \ldots, x_i, \ldots, a_m)$$

(g er altså funksjonen vi får når vi "fryser" alle variablene i f unntatt den i-te). Da må g ha et lokalt maksimum for $x_i = a_i$, og følgelig er $g'(a_i) = 0$. Per definisjon av partiellderiverte er $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = g'(a_i)$, og følgelig er $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$. $\Box$

Ved hjelp av setningen ovenfor kan vi innskrenke jakten på mulige maksimums- og minimumspunkter betraktelig.

Eksempel 1: La oss forsøke å lokalisere eventuelle maksimums- og minimumspunkter for funksjonen

$$f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$$

Vi deriverer:

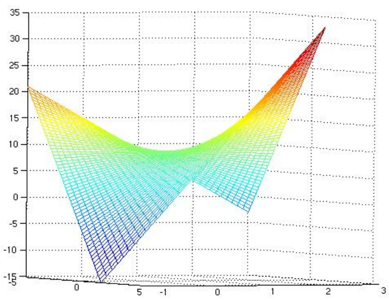
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

Ifølge setningen ovenfor bør vi se etter punkter hvor begge de partiellderiverte er null. Dette gir ligningssystemet

$$3y - 3 = 0 \qquad \text{og} \qquad 3x + 9 = 0$$

som har løsningen $x = -3$, $y = 1$. Dette betyr at det eneste mulige maksimums- eller minimumspunktet til f er $(-3, 1)$, og at den tilsvarende funksjonsverdien er $f(-3, 1) = 9$.

Neste spørsmål er om $(-3, 1)$ virkelig er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt. Vi skal lære en teknikk for å besvare slike spørsmål senere i denne seksjonen, men foreløpig nøyer vi oss med å se på grafen (figur 3). Den minner litt om en sal (på en hest), og vi ser at "vårt punkt" $(-3, 1)$ ligger på det stedet der man naturlig sitter i salen. Det betyr at punktet $(3, 1)$ hverken er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum — beveger hvis oss fra punktet i én retning, får vi større verdier, og beveger vi oss i en annen retning, får vi mindre verdier. ♣



Figur 3: Et sadelpunkt

Eksemplet ovenfor peker på det som skal være hovedproblemstillingen i resten av denne seksjonen: Hvis $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, hvordan avgjør vi da på en effektiv måte om $\mathbf{a}$ er et lokalt maksimum, minimum eller ingen av delene?

La oss begynne med å innføre litt terminologi. Et punkt $\mathbf{a}$ der $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ vil vi kalle et *stasjonært* punkt for funksjonen f. Et stasjonært punkt som hverken er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum, vil vi kalle et *sadelpunkt* (se figur 3 ovenfor). Som vi allerede har vært inne på, er det ikke vanskelig å forstå hvor det siste navnet kommer fra — det punktet du sitter på når du rir på en hest, er et typisk eksempel på et sadelpunkt; det er et minimum når du beveger deg i hestens lengderetning og et maksimum nå du beveger deg på tvers av hesten.

Vi tar med et eksempel til på hvordan man finner stasjonære punkter.

Eksempel 2: Finn de stasjonære punktene til

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy - 7x + 3y$$

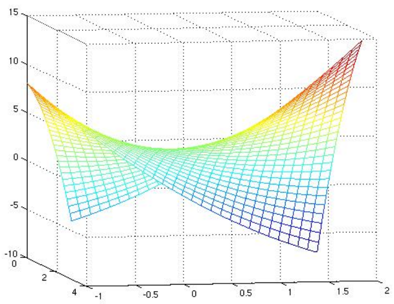
Vi deriverer:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 7$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4x + 3$$

Dette gir ligningene

$$2x + 4y = 7$$
$$4x - 2y = -3$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $x = \frac{1}{10}$, $y = \frac{17}{10}$. Det betyr at punktet $(\frac{1}{10}, \frac{17}{10})$ er et stasjonært punkt for f. Figur 4 viser grafen, og vi ser at vi også i dette tilfellet har et sadelpunkt. ♣



Figur 4: Grafen til $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy - 7x + 3y$

Annenderiverttesten

Når vi arbeider med funksjoner av to variable slik som i eksemplene ovenfor, kan vi ofte bruke MATLAB eller et lignende verktøy til å undersøke om de stasjonære punktene våre er minimumspunkter, maksimumspunkter eller sadelpunkter. Hvis funksjonsgrafen er svært flat i området rundt det stasjonære punktet, kan det imidlertid være vanskelig å avgjøre visuelt hva slags punkt vi har med å gjøre. Arbeider vi med funksjoner av flere enn to variable, er det atskillig verre å bruke visuelle hjelpemidler. Vi trenger derfor en teori som kan hjelpe oss i klassifiseringen av stasjonære punkter.

For funksjoner av én variabel har vi et slikt hjelpemiddel, nemlig *annenderiverttesten.* Den sier at hvis f er en funksjon av én variabel med $f'(a) = 0$, så er a er et lokalt minimum dersom $f''(a) > 0$ og at a er et lokalt maksimum dersom $f''(a) < 0$. Når $f''(a) = 0$, gir testen ingen konklusjon. Vårt mål er å lage en tilsvarende test for funksjoner av flere variable. Dette arbeidet er ganske komplisert fordi en funksjon av flere variable har så mange forskjellige annenderiverte, og de må kombineres på riktig måte for å få en test som virker. Heldigvis skal vi få litt hjelp av lineær algebra og matriser.

Dersom $f(x_1, \ldots, x_m)$ er en to ganger deriverbar funksjon av m variable, kan vi skrive opp alle de annenordens partiellderiverte som en $m \times m$ matrise:

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Vi kaller dette *Hesse-matrisen* til f i punktet $\mathbf{a}$ (ikke bland Hesse-matrisen, som er en matrise av annenderiverte til et skalarfelt, sammen med Jacobimatrisen, som er en matrise av førstederiverte til en vektorvaluert funksjon!). Foreløpig er Hesse-matrisen bare en grei måte å skrive opp de annenordens partiellderiverte på, men det neste resultatet viser at den også har matematisk betydning (dersom du ikke lært om egenverdier ennå, kan du hoppe over dette resultatet og gå videre til korollaret).

Vi vet at dersom de blandede partiellderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ er kontinuerlige, så er de like. Det betyr at Hesse-matrisen $Hf(\mathbf{a})$ er symmetrisk. Et viktig resultat i lineær algebra (spektralteoremet 4.10.6 i *Flervariabel analyse med lineær algebra*) sier at $Hf(\mathbf{a})$ da har m reelle egenverdier $\lambda_1(\mathbf{a}), \lambda_2(\mathbf{a}), \ldots, \lambda_m(\mathbf{a})$ (flere av dem kan være like). Det viser seg at det er fortegnet til disse egenverdiene som avgjør om et stasjonært punkt er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et sadelpunkt.

Teorem 1.4 (Annenderiverttesten) *La* $\mathbf{a}$ *være et stasjonært punkt for en funksjon* f *av* m *variable. Anta at de annenordens partiellderiverte til* f *er kontinuerlige i en omegn om* $\mathbf{a}$*. Da gjelder:*

a) *Hvis alle egenverdiene til* $Hf(\mathbf{a})$ *er (strengt) positive, så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimumspunkt.*

b) *Hvis alle egenverdiene til* $Hf(\mathbf{a})$ *er (strengt) negative, så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimumspunkt.*

c) *Hvis* $Hf(\mathbf{a})$ *har både (strengt) positive og (strengt) negative egenverdier, så er* $\mathbf{a}$ *et sadelpunkt.*

Dersom noen av egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er null og de andre har samme fortegn, så gir testen ingen konklusjon.

For funksjoner av to variable har annenderiverttesten også en annen form som er enklere å bruke i praksis.

Korollar 1.5 (Annenderiverttesten i to variable) *La $\mathbf{a}$ være et stasjonært punkt for en funksjon f av to variable. Anta at de annenordens partiellderiverte er kontinuerlige i en omegn om $\mathbf{a}$. La*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a})$$

og la D være determinanten til Hesse-matrisen: $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$*.* *Da gjelder*

(i) *Hvis $D < 0$, så er $\mathbf{a}$ et sadelpunkt.*

(ii) *Hvis $D > 0$ og $A > 0$, så er $\mathbf{a}$ et lokalt minimum.*

(iii) *Hvis $D > 0$ og $A < 0$, så er $\mathbf{a}$ et lokalt maksimum.*

Hvis $D = 0$, gir testen ingen konklusjon.

La oss se hvordan annenderiverttesten virker på noen eksempler. Vi tar først for oss funksjonen fra eksempel 1 på nytt.

Eksempel 3: Vi ser altså på funksjonen $f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$ som vi allerede har vist har partiellderiverte

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

Vi vet også at begge de partiellderiverte er null i punktet $(-3, 1)$. For å bruke annenderiverttesten regner vi ut

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

som gir

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

Ifølge annenderiverttesten er $(-3, 1)$ et sadelpunkt. ♣

La oss se på et litt mer komplisert eksempel:

Eksempel 4: Vi skal finne de stasjonære punktene til

$$f(x,y) = xye^{x-y^2}$$

og avgjøre om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.

Derivasjon gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot ye^{x-y^2} + xye^{x-y^2} = y(1+x)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 1 \cdot e^{x-y^2} + xye^{x-y^2}(-2y) = x(1-2y^2)e^{x-y^2}.$$

Siden e^{x-y^2} ikke kan være null, er det nok å løse ligningene

$$y(1+x) = 0$$
$$x(1-2y^2) = 0$$

for å finne de stasjonære punktene. Den første ligningen har to løsninger $x = -1$ og $y = 0$. Setter vi $x = -1$ inn i den andre ligningen, får vi $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Setter vi $y = 0$ inn i den andre ligningen, får vi $x = 0$. Vi har altså tre stasjonære punkter $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(0,0)$.

Neste skritt er å regne ut de annenderiverte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot 1 \cdot e^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2} = y(2+x)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \cdot (1+x) \cdot e^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2}(-2y) = (1+x)(1-2y^2)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(-4y)e^{x-y^2} + x(1-2y^2)e^{x-y^2}(-2y) = -2xy(3-2y^2)e^{x-y^2}$$

Vi må undersøke de stasjonære punktene hver for seg.

Det stasjonære punktet $(0,0)$: Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0(2+0)e^{0-0^2} = 0$$
$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = (1+0)(1-2\cdot 0^2)e^{0-0^2} = 1$$
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2\cdot 0 \cdot 0(3-2\cdot 0^2)e^{0-0^2} = 0.$$

Dette gir $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0^2 - 1^2 = -1$. Altså er $(0,0)$ et sadelpunkt.

Det stasjonære punktet $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$**:** Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+(-1))e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = (1+(-1))\Big(1-2\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2\Big)e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -2(-1)\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(3-2\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2\Big)e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{2}}$$

Dette gir

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-3/2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}\,e^{-3/2} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Siden $D > 0$, $A > 0$, forteller annenderiverttesten oss at $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ er et lokalt minimum.

Det stasjonære punktet $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$**:** Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(2+(-1))e^{-1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = (1+(-1))\Big(1-2\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2\Big)e^{-1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -2(-1)\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big(3-2\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2\Big)e^{-1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = -2\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{2}}$$

Dette gir

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-3/2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}\,e^{-3/2} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Siden $D > 0$, $A < 0$, må $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ være et lokalt maksimum. ♣

Oppgaver til seksjon 1

1. Finn de stasjonære punktene til funksjonen:

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

c) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 7y$

d) $f(x,y) = xe^{y^2+x}$

e) $f(x,y) = xy - \frac{1}{x} + \frac{2}{y}$

2. Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$

b) $f(x,y) = x^2y^2 - 4xy + 6x - 6y$

c) $f(x,y) = e^{x^2+3y^2}$

d) $f(x,y) = \frac{1}{1-x+y+x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2)$

3. Finn det stasjonære punktet til funksjonen

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 6y$$

og avgjør om det er et lokalt maksimumspunkt, minimimumspunkt eller sadelpunkt

4. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

5. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y + 3y^2$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

6. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = (x + y^2)e^x$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

7. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

8. (Eksamen i MAT1110, 13/6, 2007)

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y) = 2x^2 y + 4xy - y^2$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

9. (Eksamen i MAT1110, 13/8, 2007)

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^x$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

2 Lagranges multiplikatormetode

I forrige seksjon så vi hvordan vi kan finne de lokale maksimums- og minimumspunktene til en funksjon $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ av flere variable når x_1, x_2,

$\ldots, x_m$ får lov til å ha *alle* verdiene i definisjonsområdet til f. Vi skal nå se hva som skjer når vi har begrensninger (såkalte *bibetingelser*) på variablene.

I de enkleste problemene av denne typen har vi to funksjoner $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og vi ønsker å finne den største og/eller minste verdien til $f(x, y)$ blant de punktene som tilfredsstiller *bibetingelsen* $g(x, y) = b$, der b er en gitt konstant. La oss begynne med et enkelt (men langt!) eksempel.

Eksempel 1: Vi skal finne maksimums- og minimumsverdien til funksjonen $f(x, y) = xy$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$. Setter vi $g(x, y) = x^2 + y^2$, ser vi at dette er en bibetingelse $g(x, y) = 1$ av typen vi beskrev ovenfor. Det er flere måter å løse dette problemet på. Den mest naturlige er kanskje å løse ligningen $x^2 + y^2 = 1$ for y og sette inn (substituere) resultatet i f. Da får vi to optimeringsproblemer med én variabel,

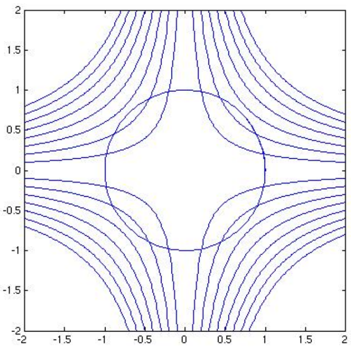
$$h(x) = x\sqrt{1 - x^2}$$

for øvre halvsirkel, og

$$k(x) = -x\sqrt{1 - x^2}$$

for nedre halvsirkel. Det er lett å finne maksimumspunktene til disse funksjonene ved vanlige metoder.

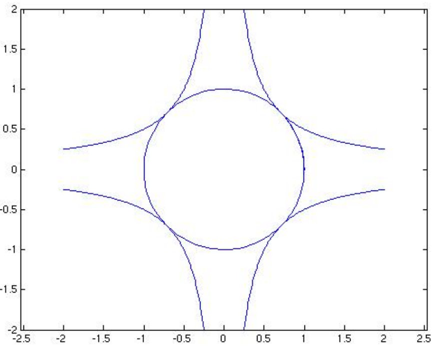
Selv om "substitusjonsmetoden" fungerer bra i dette eksemplet, har den en fundamental svakhet. Dersom bibetingelsen er mer komplisert enn $x^2 + y^2 = 1$, klarer vi ikke å løse ligningen for én av variablene, og hele forsøket vårt bryter sammen. Vi ønsker derfor å finne en metode som ikke er basert på at vi løser ligninger og substituerer.



Figur 1: Nivåkurver og bibetingelseskurve

I figur 1 har vi tegnet opp punktene som tilfredsstiller bibetingelsene (sirkelen) sammen med noen av nivåkurvene til funksjonen $f(x, y) = xy$ (husk at en *nivåkurve* $N_c = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$ er en kurve bestående av alle punkter med en gitt funksjonsverdi). Nivåkurvene tilsvarer funksjonsverdiene fra -1.6 til 1.6 med trinn på 0.2. Absoluttverdien til funksjonen vokser med x og y, så det er de ytterste nivåkurvene som svarer til høye positive og negative funksjonsverdier (legg merke til at f har positive verdier i første og tredje kvadrant, og negative verdier i annen og fjerde kvadrant).

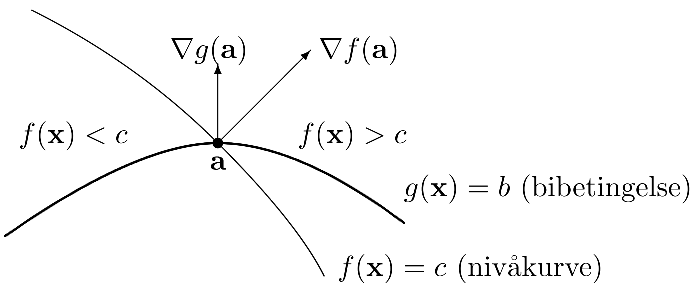
Vi ser at det er noen nivåkurver som ikke skjærer bibetingelseskurven i det hele tatt — de tilsvarer verdier som funksjonen ikke kan ha så lenge vi innskrenker oss til punkter på sirkelen. Nivåkurver som skjærer sirkelen, tilsvarer verdier som funksjonen har på sirkelen. De største og minste verdiene får vi når nivåkurvene bare berører sirkelen og går ut igjen. Figur 2 viser denne situasjonen.



Figur 2: Optimale nivåkurver

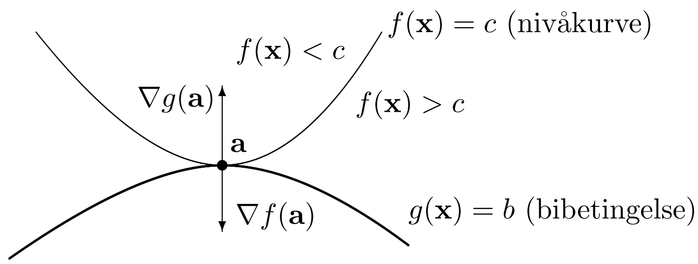
Nivåkurvene i figur 2 tilsvarer verdiene $\frac{1}{2}$ (i første og tredje kvadrant) og $-\frac{1}{2}$ (i annen og fjerde kvadrant), så maksimumsverdien til funksjonen på sirkelen er $\frac{1}{2}$ og minimumsverdien er $-\frac{1}{2}$.

Legg merke til at nivåkurvene i figur 2 tangerer bibetingelseskurven. Det er lett å innse at dette er et fenomen som ikke bare gjelder i dette eksemplet, men som gjelder generelt når man skal optimere en funksjon $f(x, y)$ under en bibetingelse $g(x, y) = b$ — dersom nivåkurven *krysser* bibetingelseskurven, vil vi normalt ha større verdier på den ene siden av skjæringspunktet og mindre på den andre (se figur 3).



Figur 3: $\mathbf{a}$ er ikke et ekstremalpunkt under bibetingelsen $g(\mathbf{x}) = b$

Dette betyr at når vi leter etter våre maksimums- og minimumspunkter, så må vi lete etter punkter der nivåkurven *tangerer* bibetingelseskurven, eller – sagt med andre ord — der normalen til nivåkurven er parallell med normalen til bibetingelseskurven (se figur 4). Disse normalene er lette å finne siden vi vet at gradienter alltid står normalt på nivåkurver (husk setning 3.7.2 i *Flervariabel analyse med lineær algebra*), og bibetingelseskurven er en nivåkurve for funksjonen $g(x, y)$. Vi leter altså etter punkter der de to gradientene $\nabla f(x, y)$ og $\nabla g(x, y)$ er parallelle, dvs. punkter der det finnes et tall λ slik at $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$.



Figur 4: **a** er et minimumspunkt under bibetingelsen $g(\mathbf{x}) = b$

I eksemplet vårt er

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

og vi er på jakt etter punkter der disse er parallelle, dvs. punkter der det finnes et tall λ slik at

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Skriver vi ut denne ligningen komponentvis, får vi

$$y = 2\lambda x$$

$$x = 2\lambda y$$

Dette gir oss to ligninger med tre ukjente, x, y og λ. Den nye ukjente λ som har sneket seg inn i regnestykket, kalles en *Lagrangemultiplikator* og har gitt navn til hele metoden. I tillegg har vi en tredje ligning siden punktet vårt må tilfredsstille bibetingelsen:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dette ligningssystemet med tre ligninger og tre ukjente kan løses på mange måter. La oss først observere at ingen av de ukjente x, y kan være 0, for hvis den ene er det, må den andre også være det, og da får vi ikke oppfylt ligningen $x^2 + y^2 = 1$. Dette medfører at heller ikke λ kan være 0. Dermed kan vi dele den første av ligningene våre på den andre, og få

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

som gir $y^2 = x^2$. Setter vi dette inn i den tredje ligningen, får vi $2x^2 = 1$ som gir $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden $y^2 = x^2$, får vi også $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dermed har vi fire punkter vi må se videre på: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Setter vi inn i funksjonen $f(x, y) = xy$, får vi

$$f((\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})) = f((-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{1}{2}$$

og

$$f((-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})) = f((\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})) = -\frac{1}{2}$$

Dette stemmer svært godt med våre grafiske undersøkelser ovenfor, og siden ekstremalverdisetningen forteller oss at funksjonen f må ha maksimums- og minimumspunkter på sirkelen (som er en lukket, begrenset mengde), må vi ha en maksimumsverdi $\frac{1}{2}$ som oppnås i punktene $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ og en minimumsverdi $-\frac{1}{2}$ som oppnås i punktene $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. ♣

La oss oppsummere eksemplet ovenfor i litt mer generelle vendinger. Vi har en funksjon $f(x, y)$ som vi ønsker å maksimere eller minimere under bibetingelsen $g(x, y) = b$, der b er en konstant. Da må vi lete etter punkter på bibetingelseskurven der $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$. Skriver vi ut denne ligningen komponentvis, får vi to ligninger med to ukjente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

I tillegg har vi bibetingelsen

$$g(x, y) = b$$

slik at vi får tre ligninger med tre ukjente. Løser vi dette ligningssystemet, vil vi (under svært generelle betingelser) ha funnet alle potensielle maksimums- og minimumspunkter for problemet vårt.

Vi kan generalisere enda litt lenger. Anta at vi har en funksjon

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

av m variable og en bibetingelse

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b$$

Setter vi opp den samme ligningen $\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \lambda \nabla g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ som før og skriver den ut komponentvis, får vi m ligninger med $m+1$ ukjente

x_1, x_2, ...,x_m, λ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m)
\end{aligned}$$

Legger vi til bibetingelsen

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b$$

har vi $m + 1$ ligninger med $m + 1$ ukjente. Igjen viser det seg at dette ligningssystemet gir oss alle mulige maksimums- og minimumspunkter.

Bemerkning: Ser du i litteraturen, vil du finne at bibetingelsene formuleres litt forskjellig — i noen bøker finner du alltid formen $g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$, mens andre tillater $g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b$ for en vilkårlig $b \in \mathbb{R}$. Egentlig er det ikke noen forskjell på disse formene — har vi et krav av typen $g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b$, innfører vi bare en ny funksjon

$$\tilde{g}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m) - b,$$

og dermed har vi en bibetingelse av typen

$$\tilde{g}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

Siden $\nabla \tilde{g} = \nabla g$, blir betingelsene for maksimums-/minimumspunkt uforandret.

Teorem 2.1 (Lagranges multiplikatormetode med én bibetingelse) *Anta at U er en åpen delmengde av $\mathbb{R}^m$, og at $f, g : U \to \mathbb{R}$ er to funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. La b være et reelt tall, og anta at $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt for f på mengden*

$$A = \{\mathbf{x} \in U \mid g(\mathbf{x}) = b\}$$

Dersom $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$, finnes det en konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \nabla g(\bar{\mathbf{x}})$$

Legg merke til at det i teoremet er kommet inn en betingelse som vi ikke har nevnt tidligere, nemlig at $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Dette er bare naturlig — dersom $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, bryter vårt geometriske resonnement sammen, og hva som helst kan hende. Vi understreker også at teoremet bare hjelper oss å finne *potensielle* maksimums- og minimumspunkter — et punkt som tilfredsstiller betingelsene, behøver ikke å være noen av delene, men kan være et generalisert sadelpunkt.

La oss se på et eksempel på bruken.

Eksempel 2: Vi skal finne minimumsverdien til funksjonen

$$f(x, y, z) = (x - 3)^2 + y^2 + z^2$$

under bibetingelsen $x^2 + 4y^2 - z = 0$. Legg merke til at problemet har en geometrisk tolkning — vi ønsker å finne det punktet (x, y, z) på flaten $z = x^2 + 4y^2$ som har kortest avstand til punktet $(3, 0, 0)$.

Lar vi $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z = 0$, ser vi at

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siden ∇g aldri er null, slipper vi å bry oss om tilfellet $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Vi ser videre at

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 6 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Skriver vi ligningen $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ på komponentform, får vi (etter å ha forkortet litt)

$$\begin{aligned} x - 3 &= \lambda x \\ y &= 4\lambda y \\ 2z &= -\lambda \end{aligned}$$

I tillegg har vi bibetingelsen

$$x^2 + 4y^2 - z = 0$$

En av utfordringene ved Lagranges multiplikatormetode er å løse ligningssystemene vi kommer frem til. Ofte er dette ganske krevende fordi ligningssystemene får en uvant form som vi ikke har noen standardmetode for løse. I tilfellet vi nå ser på, kan det være lurt å starte med ligning nummer to, $y = 4\lambda y$. Her er det to muligheter. Dersom $y \neq 0$, må $\lambda = \frac{1}{4}$. Dersom $y = 0$, kan derimot λ være hva som helst. Vi ser på disse tilfellene hver for seg:

<u>Tilfellet $\lambda = \frac{1}{4}$:</u> Den øverste ligningen blir nå til $x - 3 = \frac{1}{4}x$, som gir $x = 4$, og den tredje ligningen gir $z = -\frac{1}{8}$. Setter vi dette inn i den nederste ligningen, får vi

$$16 + 4y^2 + \frac{1}{8} = 0$$

som åpenbart ikke har noen løsning. Tilfellet $\lambda = \frac{1}{4}$ fører derfor ikke frem.

Tilfellet $y = 0$: Vi sitter nå igjen med tre ligninger for x, z og λ, nemlig

$$\begin{aligned} x - 3 &= \lambda x \\ 2z &= -\lambda \\ x^2 - z &= 0 \end{aligned}$$

Eliminerer vi z fra de to siste, ser vi at $\lambda = -2x^2$, og setter vi dette inn i den øverste ligningen, sitter vi igjen med $x - 3 = -2x^3$, dvs.

$$2x^3 + x - 3 = 0$$

Vi ser at $x = 1$ er en løsning av denne ligningen. For å undersøke om det finnes flere løsninger, polynomdividerer vi $2x^3 + x - 3$ med $x - 1$, og får $2x^2 + 2x + 3$ som ikke har reelle røtter. Dermed har vi bare én løsning for x, nemlig $x = 1$. Siden $x^2 - z = 0$, følger det at $z = 1$, (det følger også at $\lambda = -2$, men λ er vi egentlig ikke interessert i).

Vi har dermed sett at den eneste løsningen av ligningssystemet er $x = 1, y = 0, z = 1$. Siden den geometriske tolkningen forteller oss at funksjonen må ha et minimumspunkt, er det dette vi har funnet. ♣

Bemerkning: Som vi allerede har observert, er det ofte krevende å løse ligningssystemene vi får fra Lagranges metode. I praksis bruker man gjerne numeriske teknikker (f.eks. Newtons metode) til å finne løsningene.

I forrige seksjon viste vi hvordan man kan finne lokale maksimums- og minimumspunkter i *det indre* av et område ved å lete etter punkter der alle de partiellderiverte er null. Men hva med eventuelle maksimal- og minimalpunkter på randen til området? De kan vi ofte finne ved hjelp av Lagranges multiplikatormetode slik neste eksempel viser.

Eksempel 3: Vi skal finne maksimums- og minimumspunktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 - y^3$$

på området

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Hvis et slikt punkt ligger i det indre av området, vet vi at de partiellderiverte må være null i punktet. Siden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2,$$

ser vi at det eneste stasjonære punktet er $(0,0)$ og at $f(0,0) = 0$. Dette er vår første kandidat til tittelen som maksimums- og minimumspunkt. De andre kandidatene må ligge på randen

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

så vi bruker Lagranges multiplikatormetode med $f(x,y) = x^2 - y^3$ og $g(x,y) = x^2 + y^2$. Vi har

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -3y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

og skriver vi ligningen $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ på komponentform, får vi (etter litt forkorting) ligningssystemet

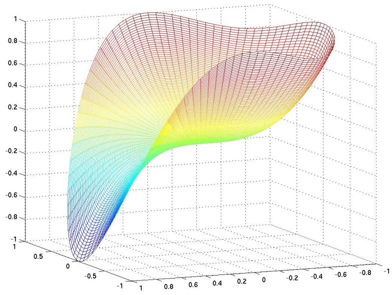
$$\begin{aligned} x &= \lambda x \\ -3y^2 &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Den første ligningen kan oppfylles på to måter, enten er $x = 0$ eller så er $\lambda = 1$. Vi ser på tilfellene hver for seg. Hvis $x = 0$, følger det fra den siste ligningen at $y = \pm 1$. Dette betyr at $(0, \pm 1)$ er mulige ekstremalpunkter. Setter vi isteden $\lambda = 1$, får den andre ligningen i systemet formen $-3y^2 = 2y$. Denne ligningen har to løsninger, $y = 0$ og $y = -\frac{2}{3}$. Setter vi disse løsningene inn i den tredje ligningen, ser vi at $y = 0$ gir $x = \pm 1$ og at $y = -\frac{2}{3}$ gir $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ialt har vi dermed sju kandidater: $(0,0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ og $(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$. For å finne maksimum og minimum, regner vi ut alle funksjonsverdiene:

$$f(0,0) = 0, \ f(0, \pm 1) = \mp 1, \ f(\pm 1, 0) = 1, \ f(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{22}{27}$$

Dette viser at maksimumsverdien 1 finner vi i punktene $(0,-1), (\pm 1, 0)$, mens minimumsverdien -1 finner vi i punktet $(0,1)$.



Figur 5: Grafisk fremstilling av flaten $f(x,y) = x^2 - y^3$

Figur 5 viser grafen. Du ser tydelig de tre maksimumspunktene og det ene minimumspunktet. Punktene $(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$ er lokale minimumspunkter når du går fra topp til topp langs randen. Det indre punktet $(0,0)$ er et sadelpunkt (men du kan ikke vise det ved annenderivertesten siden determinanten D er null). ♣

Bemerkning om Lagrangefunksjoner: I mange bøker vil du finne teorien ovenfor fremstilt på en litt annen måte ved hjelp av såkalte *Lagrangefunksjoner*. For å optimere funksjonen $f(x_1, \ldots, x_m)$ under bibetingelsen $g(x_1, \ldots, x_m) = b$, definerer man *Lagrangefunksjonen*

$$L(x_1, \ldots, x_m, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_m) - \lambda\big(g(x_1, \ldots, x_m) - b\big)$$

(legg merke til at λ nå er blitt en variabel på linje med $x_1, \ldots, x_m$). La oss glemme det opprinnelige problemet et øyeblikk, og heller finne de stasjonære punktene til L. Regner vi ut de partiellderiverte til L, får vi:

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} & = & \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\
\vdots & \vdots & \qquad\vdots \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_m} & = & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_m} \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} & = & -g(x_1, \ldots, x_m) + b
\end{array}$$

Setter vi disse uttrykkene lik 0, får vi akkurat de ligningene vi må løse når vi bruker Lagranges multiplikatormetode — å bruke denne metoden er altså det samme som å finne de stasjonære punktene til Lagrangefunksjonen! I en del bøker vil du derfor se at man løser optimeringsproblemer under bibetingelser ved å skrive opp Lagrangefunksjoner og lete etter deres stasjonære punkter.

Det er en ting til du bør være klar over. Noen bøker bytter fortegn på λ-leddet i Lagrangefunksjonen og skriver den som

$$L(x_1, \ldots, x_m, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_m) + \lambda\big(g(x_1, \ldots, x_m) - b\big)$$

Dette spiller ingen rolle — maksimums- og minimumspunktene er de samme som før, det er bare λ som får omvendt fortegn av det den ellers ville ha fått.

Lagranges multiplikatormetode med flere bibetingelser

Vi skal nå se på Lagranges multiplikatormetode når vi ønsker å optimere en funksjon

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

under *flere* bibetingelser

$$\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= b_1 \\
g_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= b_2 \\
\vdots \quad &\vdots \; \vdots \\
g_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= b_k
\end{aligned}$$

Normalt må vi ha $k < m$ for å få et fornuftig ekstremalproblem, og vi skal derfor anta at dette alltid er tilfellet.

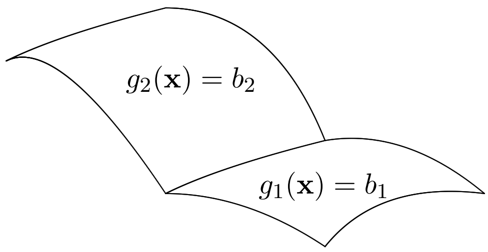
For å få en følelse for problemet ser vi først på tilfellet der vi ønsker å maksimere en funksjon

$$f(x, y, z)$$

av tre variable under to bibetingelser

$$\begin{aligned}
g_1(x, y, z) &= b_1 \\
g_2(x, y, z) &= b_2
\end{aligned}$$

De to ligningene $g_1(x, y, z) = b_1$ og $g_2(x, y, z) = b_2$ vil normalt definere to flater i rommet som skjærer hverandre langs en kurve (se figur 6). Problemet er altså å finne den største verdien til f langs denne kurven.



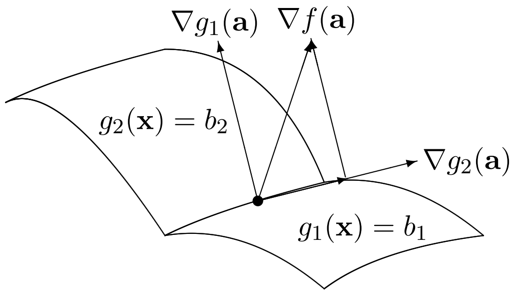
Figur 6: De to flatene $g_1(\mathbf{x}) = b_1$ og $g_2(\mathbf{x}) = b_2$ skjærer hverandre i en kurve

Husk at gradienten til f peker i den retningen hvor f vokser raskest. Dersom ∇f ikke står normalt på kurven, er det rimelig å tro at funksjonen langs kurven stiger i den retningen hvor ∇f peker. Skal vi derfor ha maksimum i et punkt, må ∇f i dette punktet stå normalt på kurven, dvs. den må ligge i normalplanet til kurven. Dette normalplanet et utspent av normalvektorene til flatene (prøv å forstå dette geometrisk!), og ∇f må derfor være en lineærkombinasjon av normalvektorene ∇g_1 og ∇g_2 til de to flatene (se figur 7).

Vi venter derfor å finne maksimalverdien i et punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der det finnes konstanter λ_1 og λ_2 slik at

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Teorem nedenfor forteller oss at denne geometriske intuisjonen er riktig.



Figur 7: $\nabla f(\mathbf{a})$ som lineærkombinasjon av $\nabla g_1(\mathbf{a})$ og $\nabla g_2(\mathbf{a})$

Teorem 2.2 (Lagranges multiplikatormetode med flere bibetingelser) *Anta at U er en åpen delmengde av $\mathbb{R}^m$, og at $f, g_1, g_2, \ldots, g_k : U \to \mathbb{R}$ er funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. Anta at b_1, b_2, ..., b_k er reelle tall og at $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt for f på mengden*

$$A = \{\mathbf{x} \in U \mid g_1(\mathbf{x}) = b_1, g_2(\mathbf{x}) = b_2, \ldots \text{ og } g_k(\mathbf{x}) = b_k\}$$

Dersom $\nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}), \nabla g_2(\bar{\mathbf{x}}), \ldots, \nabla g_k(\bar{\mathbf{x}})$ lineært uavhengige, så finnes det konstanter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ slik at

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{\mathbf{x}}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\bar{\mathbf{x}})$$

Før vi ser på et eksempel, skal vi ta en nærmere kikk på hva teoremet sier. Legg merke til at vi nå har et ligningssystem med $m + k$ ukjente x_1, x_2,...,x_m, λ_1, λ_2 ,..., λ_k, men at vi også har $m + k$ ligninger: Skriver vi ut ligningen

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x})$$

komponentvis, får vi m ligninger, og bibetingelsene

$$\begin{array}{rcl} g_1(\mathbf{x}) & = & b_1 \\ g_2(\mathbf{x}) & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) & = & b_k \end{array}$$

gir oss de k siste.

Eksempel 4: Vi skal minimere funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ under bibetingelsene

$$x + 2y - z = 2$$

$$-x + y + 2z = 1$$

(Dette er ekvivalent med å finne det punktet på skjæringslinjen mellom planene $x + 2y - z = 2$ og $-x + y + 2z = 1$ som ligger nærmest origo, så det er klart at problemet har en løsning). Vi regner ut gradientene til f og funksjonene $g_1(x, y, z) = x + 2y - z$, $g_2(x, y, z) = -x + y + 2z$:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ifølge teoremet ovenfor leter vi etter punkter der

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skriver vi ut ligningen komponentvis, får vi

$$2x = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$2y = 2\lambda_1 + \lambda_2$$

$$2z = -\lambda_1 + 2\lambda_2$$

og i tillegg har vi bibetingelsene

$$x + 2y - z = 2$$

$$-x + y + 2z = 1,$$

altså fem ligninger med fem ukjente. Ligningssystemet er lineært og kan løses ved våre standardmetoder, men vi velger en snarvei. Fra de tre første ligningene, får vi uttrykkene $x = \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}$, $y = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}$, $z = -\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2$, som vi setter inn i de to siste ligningene. Resultatet er

$$3\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} = 2$$

$$-\frac{\lambda_1}{2} + 3\lambda_2 = 1$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $\lambda_1 = \frac{26}{35}$ og $\lambda_2 = \frac{16}{35}$. Setter vi inn i uttrykkene for x, y og z, får vi $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{34}{35}$, $z = \frac{3}{35}$. Siden det geometriske minimaliseringsproblemet vårt åpenbart har en løsning, og $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{34}{35}$, $z = \frac{3}{35}$ er den eneste kandidaten, er problemet løst. ♣

Bemerkning: Vi skal ikke komme nærmere inn på det her, men nevner i forbifarten at det også finnes annenderiverttester for ekstremalverdiproblemer med bibetingelser.

Bemerkning om Lagrangefunksjoner: Også når vi skal optimere en funksjon $f(x_1, \ldots, x_m)$ under *flere* bibetingelser $g_1(x_1, \ldots, x_m) = b_1, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_m) = b_k$ er det mulig å formulere problemstillingen ved hjelp av en Lagrangefunksjon L. I dette tilfellet får L formen

$$L(x_1, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

$$-\lambda_1\big(g_1(x_1, \ldots, x_m) - b_1\big) - \ldots - \lambda_k\big(g_k(x_1, \ldots, x_m) - b_k\big)$$

Regner vi ut de partiellderiverte til L, får vi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \ldots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} \\
\vdots\quad & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\frac{\partial L}{\partial x_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_m} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_m} - \ldots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= -g_1(x_1, \ldots, x_m) + b_1 \\
\vdots\quad & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} &= -g_k(x_1, \ldots, x_m) + b_k
\end{aligned}$$

Setter vi disse uttrykkene lik 0, får vi akkurat de ligningene vi må løse når vi bruker Lagranges multiplikatormetode. Akkurat som for problemer med én bibetingelse kan vi altså løse optimeringsproblemer med flere bibetingelser ved å finne de stasjonære punktene til Lagrangefunksjonen.

Vær oppmerksom på at noen bøker bytter fortegn på λ-leddene i Lagrangefunksjonen slik at den blir seende slik ut:

$$L(x_1, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

$$+\lambda_1\big(g_1(x_1, \ldots, x_m) - b_1) + \ldots + \lambda_k\big(g_k(x_1, \ldots, x_m) - b_k\big)$$

Dette spiller ingen rolle — maksimums- og minimumspunktene er de samme som før, det er bare λ-ene som får omvendt fortegn av det de ellers ville ha fått.

Økonomisk tolkning av Lagrangemultiplikatorer

Lagranges multiplikatormetode brukes mye i økonomiske fag. Det er ikke så vanskelig å forstå hvorfor — i økonomi er man opptatt av maksimums- og minimumsproblemer (man ønsker f.eks. å maksimere inntektene og minimere utgiftene), men samtidig har man naturlige bibetingelser — man kan f.eks. ha en begrenset sum å kjøpe råvarer for, eller man har et begrenset antall arbeidstimer å fordele på ulike oppgaver.

I de eksemplene vi har sett på hittil, har Lagrangemultiplikatorene spilt en underordnet rolle; de har vært hjelpestørrelser vi har trengt for å løse problemet vårt, men de har ikke hatt noen selvstendig betydning. I en del økonomiproblemer spiller imidlertid Lagrangemultiplikatorene en viktig rolle.

La oss tenke oss av vi ønsker å maksimere en inntektsfunksjon $f(\mathbf{x})$ under bibetingelsene $g_1(\mathbf{x}) = b_1$, $g(\mathbf{x}) = b_2$, ..., $g_k(\mathbf{x}) = b_k$. Dersom vi endrer verdiene $b_1, b_2, \ldots, b_k$, må vi selvfølgelig regne med at både maksimalpunktet $\bar{\mathbf{x}}$ og maksimalverdien $\bar{y} = f(\bar{\mathbf{x}})$ endrer seg. Vi kan derfor tenke på disse som funksjoner av $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$, altså $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$, $\bar{y}(\mathbf{b}) = f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))$. Dersom λ_1, λ_2, ...,λ_k er Lagrangemultiplikatorene som gir maksimumspunktet $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$, antar vi at disse er funksjoner av $\mathbf{b}$, altså $\lambda_1(\mathbf{b})$, $\lambda_2(\mathbf{b})$, ..., $\lambda_k(\mathbf{b})$. Det er lurt å tenke på b_1, b_2, ..., b_k som *innsatsfaktorer* i produksjonen — b_1 er kanskje det totalet beløpet vi er villige til å kjøpe råvarer for, b_2 er det totale antall arbeidstimer vi er villige til å bruke i produksjonen, b_3 beløpet vi bruker på å videreutvikle produktene osv.

Et naturlig spørsmål er hvordan en endring i innsatsfaktorene vil påvirke inntektene — hvor mye vil vi f.eks. tjene på å øke arbeidsinnsatsen med 10%? Disse endringene måles av de partiellderiverte

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))}{\partial b_i}$$

Som vi snart skal se, er

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \lambda_i(\mathbf{b})$$

Dette betyr at dersom vi gir innsatsfaktoren b_i en liten økning Δb_i, så øker inntektene med $\lambda_i(\mathbf{b})\Delta b_i$. Dersom kostnadene ved å øke b_i én enhet er mindre enn $\lambda_i(\mathbf{b})$, så lønner det seg altså å øke innsatsfaktoren b_i, men dersom kostnadene er større enn $\lambda_i(\mathbf{b})$, lønner det seg å redusere b_i. Av denne grunn kalles $\lambda_i(\mathbf{b})$ *likevektsprisen* til innsatsfaktor b_i (den kalles også *skyggeprisen* for å understreke at den ikke nødvendigvis har noe med den virkelige prisen å gjøre).

La oss nå vise at

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \lambda_i(\mathbf{b})$$

Vi skal ikke gjennomføre et fullstendig matematisk resonnement, men vise at denne formelen følger dersom vi antar at de involverte funksjonene er deriverbare (det går an å vise at dette er tilfellet under svært rimelige betingelser). La oss begynne med å se på bibetingelsene. Siden de alltid er oppfylt, har vi

$$g_j(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) = b_j$$

Deriverer vi dette uttrykket mhp. b_i, får vi (husk kjerneregelen på venstresiden!):

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))\frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{2.1}$$

Deriverer vi inntektsfunksjonen mhp. b_i, får vi tilsvarende

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial b_i} f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b})$$

Ifølge Lagrangebetingelsene er

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\mathbf{b})\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))$$

og setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\mathbf{b})\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))\frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\mathbf{b})\sum_{n=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))\frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \lambda_i(\mathbf{b})$$

der vi i siste overgang har brukt formel (2.1).

Oppgaver til seksjon 2

1. Finn maksimums- og minimumspunktene (hvis de finnes) til funksjonen f under bibetingelsen(e).

a) $f(x,y) = 4x - 3y$ når $x^2 + y^2 = 1$.

b) $f(x,y) = xy$ når $9x^2 + y^2 = 18$

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ når $2x - 3y + 2z = 17$

d) $f(x,y,z) = x + y + z$ når $x^2 + y^2 = 1$ og $2x + z = 1$

e) $f(x,y,z) = 2x + 3y$ når $3x^2 + 2y^2 = 3$

f) $f(x,y,z) = x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z$ når $x + y + z = 1$ og $2x - y - z = 5$

2. Finn punktene på flaten $z^2 - xy = 1$ som ligger nærmest origo.

3. Finn punktene på skjæringkurven mellom flatene $x^2+y^2 = 1$ og $x^2-xy+y^2-z^2 = 1$ som ligger nærmest origo.

Fasit

Seksjon 1

1. a) $(2,-1)$ b) $(0,0)$ c) $(-\frac{3}{2},1)$ d) $(-1,0)$, e) $(\frac{1}{4},-4)$

2. a) Min. i $(1,-2)$ b) Sadelpunkt i $(-1,1)$ c) Min. i $(0,0)$ d) Maks. i $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ e) Sadelpunkt i $(-2,0)$

3. $(1,-2)$, lokalt minimum.

4. $(0,0)$ er et lokalt minimum, $(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$ er et sadelpunkt.

5. $(1,-\frac{1}{2})$, sadelpunkt.

6. $(-1,0)$, lokalt minimum.

7. Lokalt minimum i $(0,0,0)$, sadelpunkter i $(2,2,2),(2,-2,-2),(-2,2,-2),(-2,-2,2)$

8. a) Stasjonære punkter: $(0,0),(-2,0),(-1,-1)$
b) De to første punktene er sadelpunkter, det siste et lokalt makiimum.

9. a) $(0,0),(-2,0)$
b) $(0,0)$ er et lokalt (og faktisk et globalt) minimum, $(-2,0)$ er et sadelpunkt.

Seksjon 2

1. a) Maks.verdi 5 i punktet $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$, min.verdi -5 i punktet $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$.
b) Maks.verdi 3 i punktene $(1,3)$ og $(-1,-3)$, min.verdi -3 i $(1,-3)$ og $(-1,3)$.
c) Min.verdi 17 i punktet $(2,-3,2)$. Ingen maksimalverdi.
d) Maks.verdi $1+\sqrt{2}$ i punktet $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$, min.verdi $1-\sqrt{2}$ i punktet $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2})$
e) Maks.verdi $\frac{19}{\sqrt{70}}$ i punktet $(\frac{4}{\sqrt{70}},\frac{9}{\sqrt{70}})$, min.verdi $-\frac{19}{\sqrt{70}}$ i punktet $(-\frac{4}{\sqrt{70}},-\frac{9}{\sqrt{70}})$.
f) Min. verdi $-\frac{1}{12}$ i punktet $(2,-\frac{1}{6},-\frac{5}{6})$.

2. $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$

3. $(\pm 1,0,0),(0,\pm 1,0)$