UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 26. mars 2010.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Alle oppgavene teller 1 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 20. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Sett

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - e^{-(x^2+y^2)}.$$

I punktet $(x,y,z) = (1,-1,1)$ vokser f raskest i retningen:

☐ $(1+e^{-2}, -1-e^{-2}, 2)$

☐ $(1,1,1)$

☐ $(2+e^{-2}, 0, 0)$

☐ $(e^2, e^2, 1)$

☐ $(1,1,1/(2+e^{-2}))$

Oppgave 2. La f være som i forrige spørsmål. Origo, mao. $(x,y,z) = (0,0,0)$, er:

☐ et globalt minimum for f

☐ ikke et kritisk punkt for f,

☐ et lokalt maksimum for f

☐ et globalt maksimum for f

☐ f er ikke deriverbar i origo

Oppgave 3. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er slik at

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{T}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Da er matrisen til $\mathbf{T}$ gitt ved:

☐
$$\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

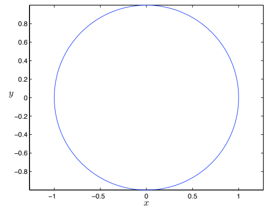
☐
$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

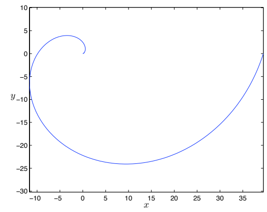
(Fortsettes på side 3.)

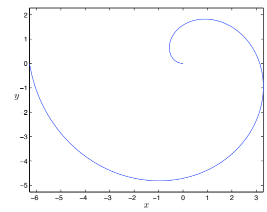
Oppgave 4. En kurve er gitt ved

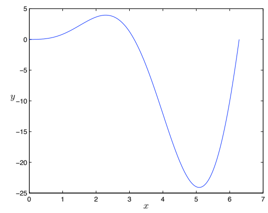
$$\mathbf{r}(t) = (t^2\cos(t), t^2\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

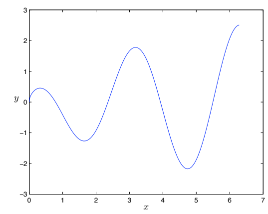
Kurven ser slik ut:

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

Oppgave 5. La $\mathcal{C}$ være kurven i forrige spørsmål, lengden på kurvestykket fra $t = 0$ til $t = \sqrt{5}$ er:

- ☐ ∞
- ☐ $8/3$
- ☐ $19/3$
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ π

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 6. Sett $\mathbf{F} = (y^2, x^2)$ og la $\mathcal{C}$ være kurven langs sidene til trekanten med hjørner $(0,0)$, $(1,0)$ og $(0,1)$, i positiv omløpsretning (mot klokka). Da er $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$:

- ☐ 2π
- ☐ $2 + \sqrt{2}$
- ☐ 0
- ☐ 4
- ☐ Integralet fins ikke siden $\mathcal{C}$ ikke er deriverbar

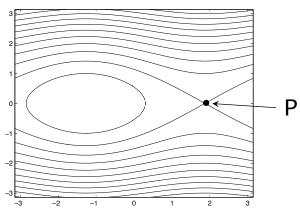
Oppgave 7. Ligningen

$$4x^2 + 4x - 2y + y^2 - 14 = 0$$

beskriver:

- ☐ en rett linje
- ☐ en parabel
- ☐ en ellipse
- ☐ en hyperbel
- ☐ det fins ingen punkter (x, y) som oppfyller ligningen

Oppgave 8. Et konturplott av en funksjon f av to variable ser slik ut:



Da vet vi at

- ☐ f har et lokalt minimum i P
- ☐ f har et lokalt maksimum i P
- ☐ $\nabla f = 0$ i P
- ☐ f har et sadelpunkt i P
- ☐ f er ikke deriverbar i P

Oppgave 9. La

$$A = \left\{(x, y) \;\middle|\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Da er $\iint_A xy^2 \, dxdy =$

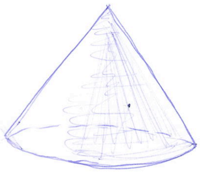
- ☐ $\pi/24$
- ☐ 0
- ☐ $5/4$
- ☐ -1
- ☐ $3/2$

(Fortsettes på side 5.)

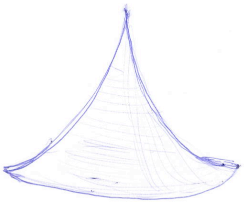
Oppgave 10. La A være gitt ved $\left\{(x, y, z) \,|\, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$. Da ser A slik ut:

☐

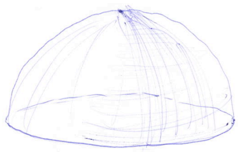
☐



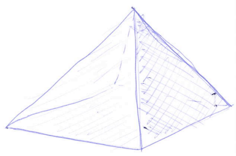
☐



☐



☐



Oppgave 11. Volumet til A er

☐ π

☐ $\pi/6$

☐ $2\pi/3$

☐ $3\pi/4$

☐ $\pi/3$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 12. En flate er gitt ved at $z = (x^2 + y^2)/2$, og begrenset ved at $x^2 + y^2 \leq 1$ og $x > 0$, $y > 0$. Arealet til flaten er:

☐ $2\pi^2$

☐ $\pi\sqrt{2}$

☐ $\pi(2\sqrt{2} - 1)/6$

☐ $\pi/4$

☐ $4\pi^2/3$

Oppgave 13. La $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

og $\mathcal{C}$ kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, a]$. Da blir

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

☐ 0

☐ a

☐ $2a$

☐ $\sqrt{a}$

☐ $2\pi a$

Oppgave 14. La B være enthetskula i $\mathbb{R}^3$, dvs.

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

For hvilke positive reelle tall p vil integralet

$$\iiint_B \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} \, dxdydz$$

konvergere?

☐ $p < 3/2$

☐ $p \leq 3/2$

☐ $p > 3/2$

☐ $p \leq 1$

☐ $p \leq \pi/2$

Oppgave 15. La b_1, b_2 og b_3 være reelle tall. Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= b_1 \\ -x + 3y + 2z &= b_2 \\ 3x - 4y - z &= b_3 \end{aligned}$$

☐ har mange løsninger for alle b_1, b_2 og b_3.

☐ har nøyaktig én løsning hvis $b_3 = b_1 - b_2$.

☐ har mange løsninger hvis $b_3 = b_1 - b_2$.

☐ har nøyaktig én løsning for alle b_1, b_2 og b_3.

☐ har ingen løsninger uansett hva b_1, b_2 og b_3 er.

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 16. La A være matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da er den inverse til A; A^{-1} lik

☐
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

☐ A

☐
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☐ A er ikke inverterbar

Oppgave 17. Sett

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da gjelder at

☐ $\mathbf{b} = 3/2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 1/2\mathbf{w}$

☐ $\mathbf{b} = 4/3\mathbf{u} - 2/3\mathbf{v} + 1/3\mathbf{w}$

☐ $\mathbf{b}$ lar seg ikke skrive som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$

☐ $\mathbf{b} = 3/4\mathbf{u} + 3/2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$

☐ $\mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$

Oppgave 18. Hvilket utsagn under er *galt*?

☐ Hvis A er en $m \times n$ matrise og $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, så er $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en lineæravbildning.

☐ Hvis $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning så er $T(|\mathbf{x}|\,\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}\,|\mathbf{y}|)$.

☐ Hvis $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning så er $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

☐ Hvis $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er en lineæravbildning så er $T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})$.

☐ Hvis $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en lineæravbildning så er $T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}) = 2T(\mathbf{x})$.

(Fortsettes på side 8.)

Oppgave 19. La $\mathcal{C}$ være den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$, $0 \leq t \leq 1$, og la $\mathbf{F}(x, y) = (2x, 2y)$. Da er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ e
- ☐ π
- ☐ i $(= \sqrt{-1})$

Oppgave 20. La A være området begrenset av kurvene $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ og $x = 1$. Da er

$$\iint_A xy\,dxdy =$$

- ☐ 1/2
- ☐ 0
- ☐ 1/24
- ☐ 3/16
- ☐ 1/12

SLUTT