UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1110 — Prøveeksamen
Eksamensdag:	5. juni 2010.
Tid for eksamen:	10.00 – 13.30.

Oppgavesettet er på 9 sider.

Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, vedlagt formelsamling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La A være en $m \times m$ matrise.

1a

Sett $S_n = I_m + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$. Vis at

$$(I - A)S_n = I - A^{n+1}.$$

Svar:

$$\begin{aligned}(I - A)S_n = S_n - AS_n &= (I + A + \ldots A^n) - \big(A + A^2 + \ldots + A^{n+1}\big) \\ &= I - A^{n+1}.\end{aligned}$$

1b

Anta heretter at A har m lineært uavhengige ortogonale egenvektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Anta at alle egenverdiene tilfredsstiller ulikheten $|\lambda_i| \leq L$. Vis at for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ så gjelder at

$$|A^n \mathbf{b}| \leq L^n |\mathbf{b}|.$$

(Fortsettes på side 2.)

Svar: Vi kan skrive $\mathbf{b} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$. Siden vektorene $\mathbf{v}_i$ er ortogonale får vi

$$\begin{aligned}
|A\mathbf{b}|^2 &= (A\mathbf{b})\cdot(A\mathbf{b}) \\
&= (A(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m))\cdot(A(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m)) \\
&= (\lambda_1 c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m c_m\mathbf{v}_m)\cdot(\lambda_1 c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m c_m\mathbf{v}_m) \\
&= \lambda_1^2 c_1^2|\mathbf{v}_1|^2 + \cdots + \lambda_m^2 c_m^2|\mathbf{v}_m|^2 \\
&\le L^2 c_1^2|\mathbf{v}_1|^2 + \cdots + L^2 c_m^2|\mathbf{v}_m|^2 = L^2(c_1^2|\mathbf{v}_1|^2 + \cdots + c_m^2|\mathbf{v}_m|^2) \\
&= L^2|\mathbf{b}|^2,
\end{aligned}$$

der den siste likheten følger fra at

$$\begin{aligned}
|\mathbf{b}|^2 &= (c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m)\cdot(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m) \\
&= c_1^2|\mathbf{v}_1|^2 + \cdots + c_m^2|\mathbf{v}_m|^2.
\end{aligned}$$

det følger nå at $|A\mathbf{b}| \le L|\mathbf{b}|$, slik at utsagnet er sant for $n = 1$. Resten av beviset er induksjon: anta at vi har vist at $|A^n\mathbf{b}| \le L^n|\mathbf{b}|$ for alle $\mathbf{b}$. Da har vi at

$$|A^{n+1}\mathbf{b}| = |A^n A\mathbf{b}| \le L^n|A\mathbf{b}| \le L^n L|\mathbf{b}| = L^{n+1}|\mathbf{b}|,$$

som fullfører induksjonsbeviset.

1c

Anta nå at $L < 1$, definér en følge $\{\mathbf{x}_n\}_{n\ge 0}$ ved $\mathbf{x}_n = S_n\mathbf{b}$. Vis at $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ når $n \to \infty$, der $\mathbf{x}$ løser ligningen

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Er $I - A$ invertibel? (Begrunn svaret.)

Svar: Først observerer vi at for $n > k$ er

$$\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k = A^n\mathbf{b} + \cdots + A^{k+1}\mathbf{b}.$$

(siden vi ved å trekke fra tar bort den første delsummen). Vi får nå

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k| &= \left|A^n\mathbf{b} + \cdots + A^{k+1}\mathbf{b}\right| \\
&\le |A^n\mathbf{b}| + \cdots + \left|A^{k+1}\mathbf{b}\right| \\
&\le L^n|\mathbf{b}| + L^{n-1}|\mathbf{b}| + \cdots + L^{k+1}|\mathbf{b}| \\
&\le \left(L^n + L^{n-1} + \cdots + L^{k+1}\right)|\mathbf{b}| \\
&= L^{k+1}\frac{1 - L^{n-(k+1)}}{1 - L}\,|\mathbf{b}| \to 0,
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 3.)

når $k \to \infty$. Altså er $\{\mathbf{x}_n\}$ en Cauchyfølge og derfor konvergent. Vi har at

$$\begin{aligned}(I-A)\mathbf{x} &= \lim_{n\to\infty}(I-A)\mathbf{x}_n = \lim_{n\to\infty}(I-A)S_n\mathbf{b}\\ &= \lim_{n\to\infty}(I-A^{n+1})\mathbf{b} = \mathbf{b} - \lim_{n\to\infty}A^{n+1}\mathbf{b}\\ &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

der vi har brukt at $(I-A)S_n = I - A^{n+1}$ fra a), og at

$$\lim_{n\to\infty}|A^{n+1}\mathbf{b}| \leq \lim_{n\to\infty}L^{n+1}|\mathbf{b}| = 0$$

(når $L < 1$) fra b). Hvis vi også klarer å vise at $(I-A)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ medfører at $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, så må $I - A$ være invertibel. Anta derfor at $(I-A)\mathbf{y} = \mathbf{0}$, slik at $A\mathbf{y} = \mathbf{y}$. For $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ gjelder

$$|A\mathbf{y}| \leq L|\mathbf{y}| < |\mathbf{y}|,$$

som motsier $A\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Det følger at $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, slik at $I - A$ er invertibel.

Oppgave 2

Definér funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved at

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

2a

Finn

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

der disse er definert.

Svar: Vi regner ut

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2\left(y^4 - x^2\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy\left(x^2 - y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2},$$

for $x \neq 0$. For $x = 0$ og $y \neq 0$ må vi bruke definisjonen av den deriverte som grenseverdien

(Fortsettes på side 4.)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}$ og får

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{hy^2}{h\,(h^2+y^4)} = \frac{1}{y^2}. \end{aligned}$$

I $(x,y) = (0,0)$ blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^5} = 0. \end{aligned}$$

2b

Vis at f er kontinuerlig langs linjestykkene $(0,y)$, $y \neq 0$. Er f kontinuerlig i $(0,0)$? (Hint: betrakt f langs parablene $x = ay^2$.)

Svar: $f(0,y) = 0$ ved defininsjon.

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0,$$

siden $y \neq 0$. Altså er f kontinuerlig langs linjestykket $(0,y)$. Sett $x = ay^2$, vi får at

$$f(ay^2,y) = \frac{ay^4}{a^2y^4+y^4} = \frac{a}{a^2+1}.$$

Dette medfører at $f(ay^2,y)$ kan anta alle verdier mellom $-1/2$ og $1/2$ når (x,y) nærmer seg $(0,0)$ langs disse parablene.

2c

Finn et globalt maksimum og et globalt minimum for f (Hint: Bruk parablene fra forrige punkt).

Svar: Alle $(x,y) \neq (0,0)$ vil ligge på en entydig parabel $x = ay^2$, og verdien i punktet blir $a/(a^2+1)$. Alternativt kan vi skrive $g(a) = a/(a^2+1)$, og $f(x,y) = g(x/y^2)$. For å finne makspunkter kan vi derfor studere max og min til g. $g'(a) = (1-a^2)/(a^2+1)^2$. $a = 1$ blir

(Fortsettes på side 5.)

maks, med $g(1) = 1/2$ og $a = -1$ blir min, med $g(-1) = -1/2$. Punktet $(1, \sqrt{2})$ blir et globalt maksimum, og $(-1, \sqrt{2})$ et globalt minimum. Vi kan bruke alle punkter der $x = \pm 2y^2$ unntatt origo.

2d

La $\mathcal{C}$ være den lukkede kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t \in [0, 2\pi]$. Finn

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds.$$

Svar: Vi observerer at $f(x,y) = -f(-x,y)$ og at $f(x,y) = f(x,-y)$. Det betyr at

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f\, ds &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos(t), \sin(t))\, dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(\cos(t), \sin(t))\, dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos(t), \sin(t)) + f(-\cos(t), -\sin(t))\, dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t), \sin(t))\, dt = 0.
\end{aligned}$$

I den andre overgangen gjorde vi her variabelskiftet $t \to t - \pi$, og brukte at $\cos(t-\pi) = -\cos t$, $\sin(t-\pi) = -\sin t$. Det er bare i den siste overgangen vi brukte $f(x,y) = -f(-x,y)$, $f(x,y) = f(x,-y)$. Det er veldig fort å begynne å regne mye her, hvis man setter inn funksjonen f i integralet. Det er ikke meningen å gjøre dette.

Oppgave 3

Finn globale maksima og minima for funksjonen $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ på mengden $A = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Svar: Vi har at $\nabla f = (1, -2, 2) \neq \mathbf{0}$ så det fins ingen ekstrempunkter i det indre av A. For å finne ekstrempunkter på randen av A bruker vi Lagranges multiplikatormetode. Ligningene blir

$$\begin{aligned}
1 &= 2\lambda x \\
-2 &= 2\lambda y \qquad \text{og } x^2 + y^2 + z^2 = 1. \\
2 &= 2\lambda z
\end{aligned}$$

Løser vi for x, y, z i de første likningene får vi $x = 1/(2\lambda)$, $y = -1/\lambda$ og $z = 1/\lambda$. Satt inn i

(Fortsettes på side 6.)

siste ligning gir dette $\lambda^2 = 1/4 + 1 + 1 = 9/4$, altså $\lambda = \pm 3/2$. Dette gir de to løsningene

$$(x, y, z) = (1/3, -2/3, 2/3), \text{ og } (x, y, z) = (-1/3, 2/3, -2/3).$$

Vi får at

$f(1/3, -2/3, 2/3) = 1/3 + 4/3 + 4/3 = 3$ og $f(-1/3, 2/3, -2/3) = -1/3 - 4/3 - 4/3 = -3$.

Dette blir globale maksima og minima.

Oppgave 4

La u og v være kontinuerlig deriverbare funksjoner $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, og la D være mengden $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Definér

$$\mathbf{F}(x, y) = (v(x, y), u(x, y)) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{G}(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Anta at på randen til D, som vi kaller $\mathcal{C}$, vet vi at $u = 1$ og $v = y$. Finn

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \, dxdy.$$

Svar: Først regner vi ut

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} &= (v(x, y), u(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{\partial (uv)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y},
\end{aligned}$$

der vi har gjenkjent de partielle deriverte av produktet uv. Sett $P(x, y) = u(x, y)v(x, y)$, da blir

$$\begin{aligned}
\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \, dxdy &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dxdy \\
&= \int_{\mathcal{C}} (P, P) \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{\mathcal{C}} y(dx + dy),
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

der vi har brukt Greens teorem på vektorfeltet $\mathbf{H} = P\mathbf{i} + P\mathbf{j}$, og at $P = uv = 1 \times y = y$ på $\mathcal{C}$. Vi parametriserer $\mathcal{C}$ ved $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $dx = -\sin(t)dt$, $dy = \cos(t)dt$, og integralet blir

$$\int_{\mathcal{C}} y(dx + dy) = \int_0^{2\pi} -\sin^2(t) + \sin(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2t) - 1\,dt = -\pi.$$

Oppgave 5

La

$$f(x) = (1 - x)^{-1/2}.$$

5a

Vis at

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}, \quad \text{for } n \geq 1.$$

Svar: Stemmer for $n = 1$, siden $f'(x) = (1/2)(1 - x)^{-3/2}$. Ved induksjon ser vi at det stemmer for $n > 1$.

5b

Vis at Taylorrekka til f om $x = 0$ blir

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}x^n.$$

Svar: Vi har at

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(1 \cdot 2)(2 \cdot 2)(3 \cdot 2)\cdots(n \cdot 2)} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n},$$

for $n \geq 1$.

(Fortsettes på side 8.)

5c

Finn konvergensområdet til rekka $g(x)$. (Hint: du kan få bruk for ulikheten $x \leq e^{x-1}$, som gjelder for alle x)

Svar: Forholdstesten gir at

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n+1}{2(n+1)}\,|x|\,.$$

Dette er mindre enn 1 for $|x| < 1$. Derfor blir konvergensradien 1. Vi må sjekke endepunktene $x = \pm 1$. For $x = 1$ blir

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}.$$

Vi sammenligner med den divergente rekka $\sum 1/n$.

$$na_n = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2(n-1)} > \frac{1}{2},$$

der vi har forkortet n, som resulterte i at faktorene i nevneren ble forskjøvet mot høyre. Derfor divergerer g for $x = 1$. For $x = -1$ blir

$$g(-1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}(-1)^n,$$

dette er en alternerende rekke som konvergerer dersom leddene er avtagende og går mot null. Rekka er opplagt avtagende, siden vi får a_{n+1} hvis vi ganger a_n med $\frac{2n+1}{2n+2} < 1$. For å konkludere at rekka konvergerer må vi vise at $\lim_n a_n = 0$. Vi bruker så hintet om at $x \leq e^{x-1}$ for alle x. Setter vi inn dette for $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$ osv. får vi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \\ &\leq e^{-1/2}e^{-1/4}e^{-1/6}\cdots e^{-1/2n} \\ &= e^{-1/2-1/4-1/6-\cdots-1/(2n)} \to 0, \end{aligned}$$

siden eksponenten går mot $-\infty$ (siden $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$). Konvergensintervallet blir derfor $[-1, 1)$.

5d

For x i det indre av konvergensintervallet til g, sett

$$F(x) = \int_0^x g\left(y^2\right)\,dy.$$

Forklar hvorfor $F(x) = \sin^{-1}(x)$.

(Fortsettes på side 9.)

Svar: Vi vet at for $|x| < 1$ blir også $x^2 < 1$, slik at $g(y^2) = f(y^2) = 1/\sqrt{1-y^2} = d/dy(\sin^{-1}(y))$. Resultatet følger nå ved å integrere begge sider fra 0 til x.

5e

Hva blir

$$s = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \quad ?$$

Svar: Integrerer vi rekka for $g(x^2)$ leddvis for $|x| < 1$ og bruker d) får vi

$$\sin^{-1}(x) = F(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Vi ser at $s = \sin^{-1}(1/2) = \pi/6$.