MAT 1110: Obligatorisk oppgave 1, V-10

Innlevering: *Senest fredag 19. februar, 2010, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Du kan skrive for hånd eller med datamaskin, men besvarelsen skal uansett leveres på papir. Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.*

Obligen skal leveres med en egen forside som du finner på
`www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1110/v10/obliger.xml`

(det vil også være papirkopier av forsiden tilgjengelig ved innlevering). På samme side finner du regelverket for obliger ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no før innleveringsfristen dersom du blir syk!

Instruksjoner:
Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score (vekten til hver oppgave står på), og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle svar skal begrunnes. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som gjennom besvarelsen viser at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen (tekst og programmer) skal imidlertid være skrevet av deg og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Oppgave: I denne oppgaven skal vi se på vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

det f og g er gitt ved

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 1, \text{ og } g(x,y) = -y^3 + 3x^2y.$$

a) 10%. Regn ut Jacobimatrisen $\mathbf{F}'(x,y)$.

b) 10%. Bruk Matlab (eller et annet verktøy) til å tegne grafene til $f(x,y)$ og $g(x,y)$ både hver for seg og i samme figur. Bruk området $(x,y) \in [-1.4, 1.4] \times [-1.4, 1.4]$. Vri grafene slik at de blir enkle å se.

c) 10%. Bruk kommandoen "`contour`" for å tegne noen nivåkurver til f og g på det samme området, både hver for seg og i samme figur. Pass på å få med nivåkurvene der $f = 0$ og $g = 0$. Finn ved inspeksjon omtrentlige verdier for alle punkter der $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{0}$.

d) 10%. Finn alle løsningene på ligningen $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{0}$ ved utregning. Det er tre løsninger.

Resten av oppgaven omhandler en numerisk metode for å finne nullpunktene til $\mathbf{F}$. Denne kalles *Newton's metode.* (Vil du vite mer om Newton's metode, kan du kikke på seksjon 5.6 i FLVA, eller du kan ta en titt på "Lab-4" i Matlabheftet.

I Newton's metode velger vi først et startpunkt $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ (som ikke bør ligge så langt fra et nullpunkt til $\mathbf{F}$). Fra dette startpunktet definerer vi en følge av punkter ved

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \left(\mathbf{F}'\left(\mathbf{x}_n\right)\right)^{-1} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_n\right), \; n \geq 1.$$

Her er $(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1}$ den inverse til Jabobi matrisen $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)$

e) 10%. Vis at dersom følgen $\{\mathbf{x}_n\}_{n>0}$ konvergerer mot et punkt $\mathbf{x}$ der $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ er inverterbar, så vil $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

f) 20%. Skriv et program som beregner grensen for denne følgen. Programmet skal ha fire inputparametre: x_1 og y_1, samt toleransen; ε, og det maksimale antall iterasjoner N. Vi regner at rekka har konvergert hvis

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}|^2 \leq \varepsilon, \tag{1}$$

samt at rekka ikke konvergerer dersom dette ikke har skjedd etter N iterasjoner. Utregningen skal foregå i en løkke som avsluttes når (1) er oppfyllt eller når $n = N$. Output er (x_n, y_n) (det siste punktet som ble utregnet) og n (antall iterasjoner).

Starten på Matlab filen skal se slik ut

```
function [x,y,n]=newton(x1,y1,eps,N)
```

g) 10%. Kjør programmet på startpunktene $(x_1, y_1) = (-1, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_1, y_1) = (1.1, 0)$. Hvilke røtter finner vi med disse startpunktene? Legg ved output.

Vi kan nå dele opp planet i 4 mengder; de punktene som gir en følge som konvergerer mot hver av de tre røttene, og de punktene som ikke konvergerer. I resten av oppgaven skal du prøve å finne disse mengdene ved å bruke Matlab.

h) 20%. Sett $a_i = -1.4 + ih$ der $h = 2.8/800$ for $i = 0, 1, \ldots, 800$, og tilsvarende $b_j = -1.4 + jh$, $j = 0, \ldots, 800$. Skriv Matlab kode som kjører programmet med $(x_1, y_1) = (a_i, b_j)$ for alle i og j, (tilsammen 641601 ganger), og spar output i tre 801×801 matriser X, Y, og n. Disse plotter du til slutt med Matlab kommandoen `pcolor`. Legg ved figurfilene. Har du noen kommentarer til hvordan disse mengdene ser ut?

Koden du skriver kan f. eks. ligne på denne:

```
e=1e-5; N=40;
X=zeros(801,801); % Matlab kjører fortere hvis
Y=zeros(801,801); % vi setter av plass for
n=zeros(801,801); % store matriser før bruk!
h=2.8/800;
a=-1.4+h*[0:800];
b=a;
for i=1:801,
   for j=1:801,
      [X(i,j),Y(i,j),n(i,j)]=newton(a(i),b(j),e,N);
   end;
end;
pcolor(a,b,n), shading flat, axis square, colorbar;
title('Antall iterasjoner');
figure(2);
pcolor(a,b,Y), shading flat, axis square, colorbar;
title('De fire mengdene');
```

Hva skjer dersom du prøver å plotte disse mengdene på et kvadrat som er mindre, f. eks. $[-0.1, 0.1] \times [-0.1, 0.1]$? Mao. hvis du kjører programmet over for $a_i = -0.1 + ih$, med $h = 0.2/800$, $i = 0, \ldots, 800$, og $b_j = a_j$.