# MAT 1110: Obligatorisk oppgave 2, V-10

Innlevering: *Senest fredag 23. april, 2010, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Du kan skrive for hånd eller med datamaskin, men besvarelsen skal uansett leveres på papir. Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.*

**Obligen skal leveres med en egen forside som du finner på**
`www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1110/v10/obliger.xml`

*(det vil også være papirkopier av forsiden tilgjengelig ved innlevering). På samme side finner du regelverket for obliger ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner:
*Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score (vekten til hver oppgave står på), og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle svar skal begrunnes. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som gjennom besvarelsen viser at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.*

*Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen (tekst og programmer) skal imidlertid være skrevet av deg og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

**Regler for "simpletennis".**

I et spill "simpletennis" vinner den spilleren som kan vinne to ballvekslinger på rad fra stillingen "*like*". Den spilleren som allerede har vunnet en ballveksling på rad (fra "like") sies å ha "*fordel*", hvis spiller A har fordel og spiller B vinner neste ball(veksling), blir stillingen like. Stillingen er altså enten "*fordel A*", "*like*" eller "*fordel B*".

Spilleren som *server* (starter ballvekslingen) antaes å ha 60% sjanse til å vinne ballen. Samme spiller server gjennom hele spillet (gamet). Vi antar at dette er spiller A. Gamet starter på stillingen "*like*".

Vi lar:

$a$ være A's sannsynlighet for å vinne gamet dersom stillingen er like,
$b$ A's sannsynlighet for å vinne gamet dersom A har fordel,
$c$ A's sannsynlighet for å vinne gamet dersom B har fordel.

**Spørsmål 1.** Forklar at

$$\begin{aligned} a &= 0.6b + 0.4c \\ b &= 0.4a + 0.6 \\ c &= 0.6a, \end{aligned}$$

og finn $a$, $b$, og $c$ ved regning.

**Spørsmål 2.** La

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

der

$$\begin{aligned} x_n &= \text{sannsynligheten for at A har vunnet gamet etter } n \text{ baller}, \\ y_n &= \text{sannsynligheten for at A har fordel etter } n \text{ baller}, \\ z_n &= \text{sannsynligheten stillingen er like etter } n \text{ baller}, \\ u_n &= \text{sannsynligheten for at B har fordel etter } n \text{ baller}, \\ v_n &= \text{sannsynligheten for at B har vunnet gamet etter } n \text{ baller}. \end{aligned}$$

Her blir $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$.

Finn en matrise $A$ slik at

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, \; n \geq 0.$$

**Spørsmål 3.** Finn egenverdiene til $A$ ved regning.

**Spørsmål 4.** Finn egenvektorene til den største egenverdien til $A$ ved regning (egenrommet skal være todimensjonalt), og gi en tolkning av disse.

**Spørsmål 5.** Finn de andre egenvektorene til $A$. Uttrykk $\mathbf{x}_0$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene til $A$. (Bruk gjerne Matlab eller Python).

**Hint:** Bruk først kommandoen `eig` til å finne en matrise der søylene er egenvektorene, bruk deretter kommandoen `rref` til å finne hvordan $\mathbf{x}_0$ kan uttrykkes ved disse egenvektorene.

**Spørsmål 6.** Plot komponentene til $\mathbf{x}_n$, altså $x_n$, $y_n$, $z_n$, $u_n$ og $v_n$, som funksjoner av $n$ for $n = 1, \ldots, 10$.

**Spørsmål 7.** Hva er sannsynligheten for at gamet består av mer enn 10 baller (mao. sannsynligheten for at A server mer enn 10 ganger før noen vinner).

**Spørsmål 8.** Finn grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{x}_0.$$

**Hint:** Bruk svaret på spørsmål 1.