UKENS NØTT - UKE 13

LØSNING

Vis at for alle positive reelle tall x holder estimatet

$$\prod_{p\le x} p \le 4^x$$

der produktet tas over alle primtall $\le x$ (og vi definerer $\prod_{p\le x<2} p = 1$). Klarer du å finne et bedre estimat?

Løsning. Vi kan først anta at x er heltallig: Øker vi fra $\lfloor x \rfloor$ til x vil høyresiden vokse, mens venstresiden forbli uforandret.
Vi fortsetter med induksjon på x. Det er lett å sjekke at ulikheten holder for $n = 1, 2$.

Anta x er partall. Da er x selv ikke primtall og $\prod_{p\le x} p = \prod_{p\le x-1} p$. Altså får vi ved induksjon

$$\prod_{p\le x} p = \prod_{p\le x-1} p \le 4^{x-1} \le 4^x$$

Vi kan derfor anta at $x = 2n+1$ er odde. Per induksjonshypotesen har vi

$$\prod_{p\le n+1} p \le 4^{n+1}$$

Vi bruker nå den svake ulikheten $4^n > \binom{2n+1}{n}$ (som følger av binomialteoremet) og ønsker å vise at $\binom{2n+1}{n} \ge \prod_{n+2\le p\le 2n+1} p$. Men dette følger da ethvert primtall p i intervallet $\in [n+2, 2n+1]$ deler binomialkoeffisenten $\binom{2n+1}{n}$. Vi får altså,

$$4^n > \prod_{n+2\le p\le 2n+1} p$$

Til slutt har vi dermed,

$$4^x = 4^{n+1}4^n > \prod_{p\le n+1} p \cdot \prod_{n+2\le p\le 2n+1} p = \prod_{p\le x} p.$$

abdulmm@math.uio.no *johnco@math.uio.no*