UKENS NØTT - UKE 2

LØSNING

Finn et (ikke-konstant) polynom $P(x)$ slik at

$$P(\sin(\theta)) = P(\cos(\theta))$$

for alle $\theta \in \mathbb{R}$. Finner du alle?

Løsning. For å finne et slikt polynom er det kanskje enklest å starte med et trigonometrisk utrykk som blir uforandret om man bytter om $\sin(\theta)$ og $\cos(\theta)$. Det enkleste sådan er $\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$. Setter vi $x = \sin(\theta)$ gir dette utrykket $x\sqrt{1-x^2}$. Dette er ikke noe polynom, men kvadratet er det:

$$P(x) = x^2(1 - x^2)$$

Det er nå lett å sjekke at dette polynomet tilfredstiller betingelsen.

Vi finner nå alle slike polynomer og skriver $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. For enkelhetens skyld skriver vi $x = \sin(\theta)$. Da blir likningen

$$P(x) = P(\sqrt{1-x^2}). \tag{1}$$

Merk at

$$P(-x) = P(\sqrt{1-(-x)^2}) = P(\sqrt{1-(x)^2}) = P(x).$$

Dette betyr at $P(x)$ er en jevn funksjon og at alle koeffisientene foran $x, x^3, x^5, \ldots$ i $P(x)$ er 0.

La oss nå se på verdien av $P(x)$ i noen lure verdier av x. Vi har

$$P(0) = P(\sqrt{1-0^2}) = P(1),$$

og dermed har vi

$$P(1) = P(-1) = P(0).$$

Siden $P(0) = a_0$, betyr dette at polynomet $P(x) - a_0$ vil ha $x = 0, \pm 1$ som røtter, altså en faktor $x(x-1)(x+1) = x(x^2-1)$. Faktisk vil den ha $x^2(x^2-1)$ som faktor, fordi bare partallspotenser opptrer i $P(x)$. Vi kan så skrive

$$P(x) - a_0 = x^2(x^2 - 1)Q(x)$$

for et polynom $Q(x)$. Dette viser forresten også at det ikke finnes noen polynomer $P(x)$ av grad $1, 2, 3$ som oppfyller (1), fordi ingen av disse kan ha en faktor $x^2(x^2-1)$.

Nå, når både $P(x)$ og $x^2(x^2-1)$ tilfredstiller betingelsen (1), må også $Q(x)$ gjøre det, og vi kan gjenta argumentet med $Q(x)$. Men merk at $Q(x)$ har lavere grad enn $P(x)$, så når vi gjentar prosessen vil vi til slutt ende opp med en konstant. Dette betyr at vi kan skrive $P(x)$ som et utrykk som bare involverer $x^2(x^2-1)$ og konstanter.

I alt har vi vist at

$$P(x) = R(x^4 - x^2)$$

for et polynom $R(x)$, og det er lett å vise at alle polynomer på denne formen tilfredstiller den opprinnelige betingelsen.

abdulmm@math.uio.no *johnco@math.uio.no*