UKENS NØTT - UKE 3

LØSNING

I denne oppgaven skal vi se på **kontinuerlige** funksjoner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ slik at

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \frac{1}{2} \\ \int_0^1 f(x)^2 dx &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Det er klart at den konstante funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}$ oppfyller disse kravene, men finnes det andre muligheter for f?

Svar: Nei, $f(x) = \frac{1}{2}$ er den eneste muligheten.

Løsning: For å vise at $f(x) = \frac{1}{2}$ er den eneste mulige funksjonen, ser vi på $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ og prøver å vise at $g(x) = 0$ for alle x. Fra oppgaven får vi at

$$\int_0^1 g(x)^2 dx = \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.$$

Men en ikke-negativ, kontinuerlig funksjon med integral 0, må være 0 overalt (lag en tegning av grafen til $g(x)^2$ eller se kommentaren nedenfor). Altså er $g(x) = 0$ for alle x og følgelig $f(x) = \frac{1}{2}$.

Kommentar 1. *Dersom $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon slik at $h(x) \geq 0$ for alle x og $\int_0^1 h(x)dx = 0$, er $h(x) = 0$ overalt.*

Bevis. Vi antar det motsatte, altså at det finnes en $c \in [0,1]$ slik at $h(c) > 0$. Ved kontinuiteten til h må det finnes et intervall $(a,b) \subset [0,1]$ om c slik at $h(x) > 0$ for alle $x \in (a,b)$. Men da er

$$\int_0^1 h(x)dx \geq \int_a^b h(x)dx > 0.$$

Dette strider mot antagelsene om h, så det kan ikke finnes en slik c, og $h(x) = 0$ for alle x. $\square$

Kommentar 2. Man kan også gi en løsning ved å bruke Cauchy-Schwarz ulikheten

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)\left(\int_0^1 g(x)^2 dx\right)$$

med likhet hvis og bare hvis $f(x) = kg(x)$ for en konstant k.

Setter vi $g(x) = 1$ i denne ulikheten, får vi

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right).$$

Antagelsene i oppgaven gir at vi faktisk har likhet ovenfor, og vi må ha $f(x) = k \cdot g(x) = k$. Derfor er $f(x) = \int_0^1 k dx = \frac{1}{2}$.

abdulmm@math.uio.no *johnco@math.uio.no*