UKENS NØTT - UKE 5

LØSNING

Finn alle mulige $a \in \mathbb{R}$ slik at 2.gradslikningene

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x^2 + ax + 1 & = & 0 \\ (2) & x^2 + x + a & = & 0 \end{array}$$

har en felles løsning.

Løsning: Løser vi for a i (2) får vi $a = -(x^2 + x)$. Setter vi inn i (1), får vi

$$x^2 - (x^2 + x)x + 1 = 1 - x^3 = (1 - x)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Altså får vi $x \in \{1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\}$. Dette gir $a = 1$ og $a = -2$.

Kommentar. La oss se på et relatert problem: La $P(x) = x^2 + px + q$ har røtter x_1, x_2 og $Q(x) = x^2 + Px + Q$ ha røtter y_1, y_2. Se nå på utrykket

$$\Delta = (x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_2)$$

Dette er symmetrisk i x_1, x_2 og y_1, y_2 hver for seg og vi vet dermed at vi kan utrykke Δ i koeffisientene p, q, P, Q. Etter litt algebra finner vi at

$$\Delta = q^2 + Q^2 - 2qQ + qP^2 + Qp^2 - pP(Q + q)$$

En nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at $P(x)$ og $Q(x)$ har en felles rot er at $\Delta = 0$. Setter vi $(p, q, P, Q) = (1, a, a, 1)$ (slik koeffisientene i oppgaven er gitt) får vi

$$\Delta = 1 + a^2 - 2a + a^3 + 1 - a(a + 1) = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2(a + 2)$$

Altså må $a = 1$ eller $a = -2$.

abdulmm@math.uio.no *johnco@math.uio.no*