UKENS NØTT - UKE 7

LØSNING

Finn alle forskjellige tall $x, y \in \mathbb{N}$ slik at

$$x^y = y^x. \tag{1}$$

Hint: Se på primtallsfaktoriseringene til x og y.

Løsning: De eneste løsningene er $(x, y) = (2, 4), (4, 2)$.

La $x = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ og $y = p_1^{b_1} \cdots p_n^{b_n}$. Ved (1), har vi at

$$a_1 y = b_1 x, \quad a_2 y = b_2 x, \quad \ldots, \quad a_n y = b_n x$$

Antar vi at $y > x$, får vi at $a_i < b_i$ for alle $i = 1, \ldots, n$. Dermed er y delelig med x, og $y = kx$ for et heltall $k > 1$ (siden $y > x$). Da får vi likningen

$$x^{kx} = (kx)^x$$

Tar vi x-te roten av begge sider får vi $x^k = kx$, eller

$$x^{k-1} = k$$

Men hvis $k > 1$, har vi for alle $x > 1$

$$x^{k-1} \geq 2^{k-1} \geq k$$

med likhet bare hvis $k = 2$ og $x = 2$. Dermed er $x = 2$ og $y = kx = 4$ eneste løsning. Bytter vi om rollene til x og y får vi også løsningen $x = 4, y = 2$.

Kommentar. Vi kan også bruke kalkulus til å løse denne oppgaven. Tar vi logaritmer av likningen (1) får vi

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}.$$

Lar vi $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, er det lett å vise at f er avtagende på intervallet $[e, \infty)$. Dette betyr at hvis $x, y > e$, medfører $f(x) = f(y)$ at $x = y$. Ved kravet om at x og y skal være forskjellige får vi altså ingen løsninger når $x, y > e$. Dermed må enten x eller y være mindre enn e og vi kan anta at $x \in \{1, 2\}$. For $x = 1$, får vi $y = 1$, altså ingen gyldig løsning, for $x = 2$ får vi $2^y = y^2$ som kun har løsningen $y = 4$.

abdulmm@math.uio.no *johnco@math.uio.no*