UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Fredag 15. juni 2012.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 3 osv.) teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1

a) Bruk MATLAB-sekvensen

```
>> A=[1 2 3 1 5;-2 1 4 2 4;3 1 -1 1 -1]
A =

     1     2     3     1     5
    -2     1     4     2     4
     3     1    -1     1    -1

>> rref(A)

ans =

    1.0000         0   -1.0000         0   -1.2000
         0    1.0000    2.0000         0    3.6000
         0         0         0    1.0000   -1.0000
```

til å finne alle løsninger av ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z + u &= 5\\
-2x + y + 4z + 2u &= 4\\
3x + y - z + u &= -1
\end{aligned}
$$

(Fortsettes på side 2.)

b) Skriv vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av *tre* av søylene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i A.

Oppgave 2

a) Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^2y - 4xy - y^2$$

b) Avgjør hva slags type hvert av de stasjonære punktene er (dvs. lokalt minimumspunkt, lokalt maksimumspunkt eller sadelpunkt).

Oppgave 3

Finn den inverse matrisen til

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vis at funksjonen gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - x - y + 1 \\ x - y^2 + 2y - 2 \end{pmatrix}$ har en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i et område rundt punktet $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ slik at $\mathbf{G}(1, -2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finn $\mathbf{G}'(1, -2)$.

Oppgave 4

a) For hvilke x konvergerer rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \text{ ?}$$

b) Finn summen til rekken der den konvergerer.

Oppgave 5

a) Vis at volumet til området som ligger under flaten $z = 8 - x^2 - y^2$ og over flaten $z = x^2 + 4x + y^2 - 8y$ er gitt ved

$$V = \iint_S \left(8 - 2x^2 - 4x - 2y^2 + 8y\right)\, dxdy$$

der S er sirkelen i xy-planet med sentrum i $(-1, 2)$ og radius 3.

b) Regn ut volumet V.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6

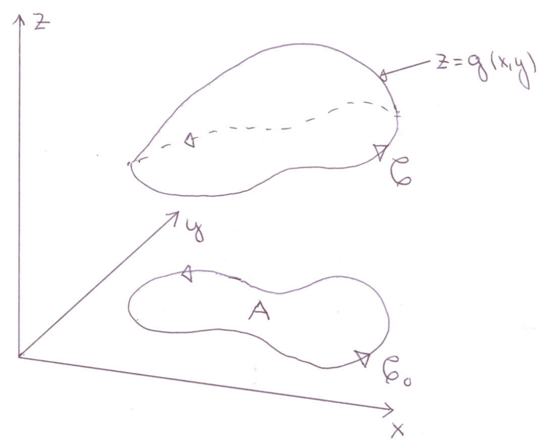
I denne oppgaven er A en lukket, begrenset mengde i xy-planet som er avgrenset av en enkel, lukket, glatt kurve $\mathcal{C}_0$ med positivt orientert parametrisering

$$\mathbf{r}_0(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}, \qquad t \in [a, b]$$

Videre er $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en funksjon med kontinuerlige annenordens partiellderiverte, og $\mathcal{C}$ er kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + g(x(t), y(t))\,\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b]$$

Figuren viser hvordan vi tenker på $\mathcal{C}$ som en "løfting" av $\mathcal{C}_0$ opp på flaten $z = g(x, y)$.



Anta at $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

der P, Q, R har kontinuerlige partiellderiverte. Vis at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_0} \tilde{P}\,dx + \tilde{Q}\,dy$$

der

$$\tilde{P}(x, y) = P(x, y, g(x, y)) + R(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

og

$$\tilde{Q}(x, y) = Q(x, y, g(x, y)) + R(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

Vis videre at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_A H(x, y)\,dxdy$$

der

$$\begin{aligned} H(x, y) = {} & \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ & - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, g(x, y)) - \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ & + \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

SLUTT