Løsningsforslag

Oppgave 1 a) A er den utvidede matrisen til ligningssystemet, og

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

er den reduserte trappeformen til A. Siden den tredje søylen ikke er en pivotsøyle, kan den tilsvarende variabelen z velges fritt. Det opprinnelige ligningssystemet er ekvivalent med

$$\begin{aligned} x - z &= -1.2 \\ y + 2z &= 3.6 \\ u &= -1 \end{aligned}$$

Løsningene er dermed gitt ved $u = -1$, $z = z$, $y = 3.6 - 2z$, $x = -1.2 + z$, der z kan velges fritt.

b) Den reduserte trappeformen viser at søyle 1, 2 og 4 i A er lineært uavhengige og dermed danner en basis for $\mathbb{R}^3$. For å finne den ønskede lineærkombinasjonen, må vi finne tall x, y, u slik at

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dette tilsvarer å finne en løsning av det opprinnelige ligningssystemet med $z = 0$. Setter vi inn i løsningene i a), har vi dermed $x = -1.2$, $y = 3.6$ og $u = -1$.

Oppgave 2 a) Vi finner først de partiellderiverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 4y = 2y(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4x - 2y$$

Vi ser at $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ når $x = 2$ og når $y = 0$. Vi ser på disse tilfellene hver for seg.

<u>Tilfellet $x = 2$:</u> Setter vi inn i ligningen $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, får vi

$$2^2 - 4 \cdot 2 - 4y \iff y = -2$$

<u>Tilfellet $y = 0$:</u> Setter vi inn i ligningen $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, får vi

$$x^2 - 4x - 2 \cdot 0 = 0 \iff x(x-4) = 0 \iff x = 0 \text{ eller } x = 4$$

Vi har dermed tre stasjonære pinkter: $(2,-2)$, $(0,0)$ og $(4,0)$.

b) Hesse-determinanten i et generelt punkt er

$$\begin{vmatrix} 2y & 2x-4 \\ 2x-4 & -2 \end{vmatrix}$$

Setter vi inn koordinatene til de stasjonære punktene, får vi:

<u>Punktet $(2,-2)$:</u> Vi har

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

Siden $D > 0$ og $A = -4 < 0$, er $(2,-2)$ et lokalt maksimumspunkt ifølge annenderiverttesten.

<u>Punktet $(0,0)$:</u> Vi har

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

Siden $D < 0$, er $(0,0)$ et sadelpunkt ifølge annenderiverttesten.

<u>Punktet $(4,0)$:</u> Vi har

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

Siden $D < 0$, er $(4,0)$ et sadelpunkt ifølge annenderiverttesten.

Oppgave 3: Vi finner den inverse matrisen ved den vanlige fremgangsmåten:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{I+II}{\sim}$$

$$\overset{I+II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vi ser at $\mathbf{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. For å vise at $\mathbf{F}$ har en lokal invers definert i en omegn om $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, må vi sjekke at $\mathbf{F}'(0,0)$ er inverterbar. Generelt er

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-1 & -1 \\ 1 & -2y+2 \end{pmatrix}$$

så $\mathbf{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dette er matrisen ovenfor som vi vet er inverterbar, og ifølge omvendt funksjonsteorem har dermed $\mathbf{F}$ en (lokal) omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn om $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ifølge det samme teoremet er

$$\mathbf{G}'(-1,2) = \mathbf{F}'(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4 a) Vi bruker forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} x \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} |x| = |x|$$

Dette gir konvergens for $|x| < 1$ og divergens for $|x| > 1$. Endepunktene må undersøkes separat:

$\underline{x = 1}$: Rekken blir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ som divergerer (dette er samme rekke som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

$\underline{x = -1}$: Rekken blir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ som konvergerer ifølge testen for alternerende rekker.

Konvergensintervallet er dermed $[-1, 1)$.

b) Vi setter

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \qquad \text{for } x \in [-1, 1)$$

Ganger vi dette uttrykket med x og deriverer, får vi

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{for } x \in (-1, 1)$$

Integrasjon på begge sider, gir

$$xS(x) = -\ln(1-x) + C \qquad \text{for } x \in (-1, 1)$$

Siden venstresiden åpenbart er 0 for $x = 0$, må vi velge $C = 0$. Dermed har vi

$$S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} \qquad \text{for } x \in (-1, 1), x \neq 0$$

For $x = 0$, ser vi ved innsetting i rekken at $S(0) = 1$. Ved Abels teorem gjelder likheten $S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ også for $x = -1$. Dermed har vi

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{for } x \in [-1, 1), x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Oppgave 5 a) Skjæringskurven mellom de to flatene er bestemt ved

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 4x + y^2 - 8y$$

Vi omformer uttrykket og får

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 4x + y^2 - 8y \iff 2x^2 + 4x + 2y^2 - 8y - 8 = 0$$

$$\iff 2(x+1)^2 + 2(y-2)^2 = 18 \iff (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

Dette er ligningen til en sirkel med sentrum i $(-1, 2)$ og radius 3. Volumet vi er interessert i, ligger over den tilsvarende sirkelskiven S, og vi får

$$V = \iint_S \left[(8 - x^2 - y^2) - (x^2 + 4x + y^2 - 8y)\right] dxdy$$

$$= \iint_S \left(8 - 2x^2 - 4x - 2y^2 + 8y\right) dxdy$$

b) Fullfører vi kvadratene, ser vi at

$$8 - 2x^2 - 4x - 2y^2 + 8y = 18 - 2(x+1)^2 - 2(y-2)^2$$

og innfører vi polarkoordinater med sentrum i $(-1, 2)$, får vi $x = -1 + r\cos\theta$, $y = 2 + r\sin\theta$ og

$$V = \iint_S \left(8 - 2x^2 - 4x - 2y^2 + 8y\right) dxdy = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (18 - 2r^2) r \, d\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 (18r - 2r^3) \, dr = \left[2\pi \left(9r^2 - \frac{r^4}{2}\right)\right]_0^3 = 81\pi$$

Oppgave 6
Ved kjerneregelen er

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)\right)\mathbf{k}$$

Dermed er

$$\int_\mathcal{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left[P(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{i} + Q(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{j} + R(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{k}\right] \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \left[P(\mathbf{r}(t))x'(t) + Q(\mathbf{r}(t))y'(t) + R(\mathbf{r}(t)) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) \right) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\left(P(\mathbf{r}(t)) + R(\mathbf{r}(t)) \frac{\partial g}{\partial x}(x(t),y(t)) \right) x'(t) + \left(Q(\mathbf{r}(t))y'(t) + R(\mathbf{r}(t)) \frac{\partial g}{\partial y}(x(t),y(t)) \right) y'(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\tilde{P}(x(t),y(t))x'(t) + \tilde{Q}(x(t),y(t))y'(t) \right] dt =$$

$$= \int_{\mathcal{C}_0} \tilde{P}\,dx + \tilde{Q}\,dy$$

Bruker vi Greens teorem, ser vi at

$$\int_{\mathcal{C}_0} \tilde{P}\,dx + \tilde{Q}\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right) dxdy,$$

så det holder å vise at $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = H(x,y)$.

Ved produktregelen og kjerneregelen har vi nå

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Q(x,y,g(x,y)) + R(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right) =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) +$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) +$$

$$+ R(x,y,g(x,y)) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$$

og tilsvarende

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(P(x,y,g(x,y)) + R(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right) =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) +$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) +$$

$$+ R(x,y,g(x,y)) \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

Siden blandede partiell deriverte er like under våre betingelser, ser vi at

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,g(x,y)) - \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\
&+\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \\
&= H(x,y)
\end{aligned}
$$

og dermed er formelen bevist.

Bemerkning: Den siste formelen kan oppfattes som et spesialtilfelle av Stokes' teorem (som ikke er del av kurset), og kan også utledes fra det.