UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Fredag 14. juni 2013.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 3 osv.) teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1 La A_a være matrisen

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

der $a \in \mathbb{R}$.

a) Avgjør for hvilke verdier av a matrisen A_a er inverterbar.

b) I det tilfellet der A_a ikke er inverterbar, skriv en kolonne i A_a som en lineærkombinasjone av to andre.

Løsning: *a)*

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

$\sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix}$$

Ser at $\det(A_a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 6$, *så* A_a *er inverterbar for* $a \neq 6$. *b) Vi har at*

$$A_6 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

, *så vi ser at* $(3,1,6) = 2 \cdot (2,2,4) - (1,3,2)$.

Oppgave 2 Vi betrakter potensrekken $f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2}$.

a) Finn konvergensområdet til rekken.

b) Summer rekken.

Løsning: *a) Vi bruker forholdstesten:* $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n-1)}{|x|^n/(n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n-1}|x| = |x|$. *Dette viser at rekka konvergerer for* $|x| < 1$. *Sjekker endepunkter: For* $x = -1$ *ser vi at vi har en alternerende rekke med ledd som avtar mot null, så rekka konvergerer for* $x = -1$. *For* $x = 1$ *har vi* $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *som vi vet divergerer. Så konvergensområdet er* $[-1,1)$. *b) Vi starter med å skrive* $f(x) = x^2 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} = x^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x^2 \cdot g(x)$. *Vi finner* $g(x)$. *Vi ser at* $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, *så* $g(x) = -\log(1-x) + C$. *Siden* $g(0) = 0$ *har vi* $C = 0$. *Så* $f(x) = -x^2 \log(1-x)$.

Oppgave 3
La A være ellipsoiden

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (2y)^2 + z^2 = 1\}.$$

Bruk Lagrange's multiplikatormetode til å finne punktene på A som ligger nærmest punktet $(1/2, 0, 0)$.

Løsning: La $f(x,y,z) = (x-1/2)^2 + y^2 + z^2$. Problemet er da å minimere f under bibetingelsen $g(x,y,z) = x^2 + (2y)^2 + z^2 = 1$. Bruker vi Lagrange må vi da løse $\nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z)$. Vi har $\nabla f(x,y,z) = (2(x-1/2), 2y, 2z)$ og $\nabla g(x,y,z) = (2x, 8y, 2z)$. Så vi må løse ligningene

(i) $x - 1/2 = \lambda x$

(ii) $y = 4\lambda y$

(iii) $z = \lambda z$

Dersom $z \neq 0$ får vi fra (iii) at $\lambda = 1$. (i) gir da at $x - 1/2 = x$ som er umulig.

Ser videre på tilfellet $z = 0$. Dersom $y \neq 0$ får vi fra (ii) at $\lambda = 1/4$, som via (i) gir $x = 2/3$. Fra bibetingelsen får vi at $(2/3)^2 + 4y^2 = 1$ som gir at $y = \pm 1/2\sqrt{1 - 4/9} = \pm\sqrt{5}/6$, og $f(2/3, \sqrt{5}/6, 0) = 1/6$.

Dersom også $y = 0$ er det bare $x = \pm 1$ som er aktuelle punkter, og $f(-1,0,0) = 9/4$ og $f(1,0,0) = 1/4$.

Siden $1/6 < 1/4 < 9/4$ ser vi at punktene $(2/3, \pm\sqrt{5}/6, 0)$ er de nærmeste.

Oppgave 4
La B være matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene for matrisen B.

(Fortsettes på side 3.)

b) La $\mathbf{w} = (2, -5)$. Finn $\lim_{n\to\infty} B^n\mathbf{w}$.

Løsning: *a) Det karakteristiske polynomet blir*

$$(\lambda - 5/4) \cdot (\lambda - 1/4) + 3/16 = \lambda^2 - 3/2 + 1/2,$$

så egenverdiene er gitt ved

$$\lambda = \frac{3/2 \pm \sqrt{9/4 - 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4},$$

som gir $\lambda_1 = 1$ *og* $\lambda_2 = 1/2$. *Egenvektoren tilhørende* λ_1*: Løser ligningene* $5/4x + 1/2y = x$ *og* $-3/8x + 1/4y = y$. *Andre ligning gir* $x = -2y$ *så vi kan velge* $\mathbf{v}_1 = (-2, 1)$. *Egenvektoren tilhørende* λ_2*: Løser ligningene* $5/4x+1/2y = 1/2x$ *og* $-3/8x+1/4y = 1/2y$. *Andre ligning gir* $y = -3/2x$ *så vi kan velge* $\mathbf{v}_2 = (1, -3/2)$. *Videre ser vi at* $(2, -5) = (-2, 1)+4\cdot(1, -3/2)$, *og siden vi da har at*

$$B^n\mathbf{w} = (-2, 1) + (1/2)^n 4 \cdot (1, -3/2),$$

ser vi at $\lim_{n\to\infty} B^n\mathbf{w} = (-2, 1)$.

Oppgave 5 La $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ og la $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\frac{x-x_0}{a})^2+(\frac{y-y_0}{b})^2 \leq 1\}$ for $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ og $a, b \in \mathbb{R}$. Videre, la $F = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildingen $F(x, y) = (x_0 + ax, y_0 + by)$. Vis at F avbilder A på B og at F har en invers F^{-1} som avbilder B på A. Bruk F til å vise følgende formel for integrasjon i ellipsekoordinater: La $f(x, y)$ være en kontinuerlig funksjon på B. Da er

$$\int\int_B f(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(x_0 + ar\cos(t), y_0 + br\sin(t))abrdrdt.$$

Løsning: *Vi har at* $(\frac{(x_0+ax)-x_0}{a})^2 + (\frac{(y_0+bx)-y_0}{b})^2 = x^2 + y^2$, *så hvis* $(x, y) \in A$ *så er* $F(x, y) \in B$. *Hvis vi setter* $G(x, y) = (\frac{x-x_0}{a}, \frac{y-y_0}{b})$ *er det lett å se at* $G(F(x, y)) = (x, y)$, *så* $G = F^{-1}$, *og per definisjon er* $F^{-1}(B)$ *inneholdt i* A. *Vidre har vi at Jacobideterminanten til* F *er konstant lik* ab, *så ved skifte-av-variabel-formelen har vi at*

$$\int\int_B f(x, y)dxdy = \int\int_A f(x_0 + ax, y_0 + by)abdxdy,$$

og formelen over får vi nå ved å bruke polarkoordinater.

Oppgave 6

La $f(x, y, z) = z + 4x^2 - 8x + 4 + y^2 - 4y$, og la Z være mengden

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}.$$

a) La Γ være mengden $\Gamma = \{(x, y, z) \in Z : z = 0\}$. Hvilket kjeglesnitt fremstiller Γ?

b) Finn volumet av det begrensete området avgrenset av (x, y)-planet og Z.

(Fortsettes på side 4.)

Løsning: *a) Vi har*

$$4x^2 - 8x + 4 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow \quad (1)$$
$$4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \quad (2)$$
$$(x-1)^2 + (\frac{y-2}{2})^2 = 1, \quad (3)$$

så vi ser at Γ *er en ellipse med senter* $(1,2)$. *b) La* A *være det begrensede området i* (x,y)*-planet avgrenset av* Γ. *Vi får da at volumet er lik*

$$V = \int\int_A 4 - 4(x-1)^2 - (y-2)^2 dxdy.$$

Bruker vi ellipsekoordinatene fra forrige oppgave, $x = 1 + r\cos(t), y = 2 + 2r\sin(t), r \in [0,1], t \in [0, 2\pi]$, får vi

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4 - 4r^2\cos^2(t) - 4r^2\sin^2(t)) \cdot 2rdrdt \quad (4)$$
$$= 8 \cdot \int_0^2 \int_0^{2\pi} r - r^3 drdt \quad (5)$$
$$= 16\pi \int_0^1 r - r^3 dr \quad (6)$$
$$= 4\pi. \quad (7)$$

SLUTT