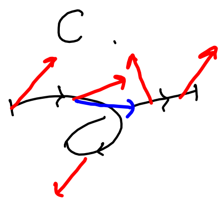
$\vec{r} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.



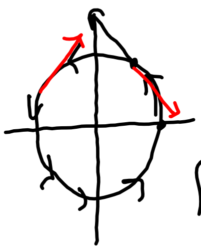
$$\int_C f \, ds := \int_0^1 f(\vec{r}(t)) \cdot \underbrace{v(t)}_{|\vec{r}\,'(t)|} \, dt .$$

Vektorfelter: $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \, dt .$$

<u>Eks</u>: La $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

$\vec{r}\,'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$.



La $F(x,y) = (y, -x)$,

$$\int_C F \, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \, dt .$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin(t), -\cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t \, dt = -2\pi ,$$

Andre veien: $\vec{r}(t) = (\cos(-t), \sin(-t))$

$$\int_C F \, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin(-t), -\cos(-t)) \cdot (\sin(-t), -\cos(-t)) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2(-t) + \cos^2(-t) \, dt$$

$$= 2\pi .$$

feb 3-10:10

Dessom $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ er to ekvivalente parametriseringer av kurven C, $\vec{r}_1(t) = r_2(\phi(t))$, og dersom $\vec{F}$ er et vektorfelt har vi

(i) Dessom $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ har samme orientering så har vi

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r}_1 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 \quad , \text{ og}$$

(ii) dersom $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ har motsatt orientering så har vi

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r}_1 = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 \, .$$

Skifte av variable:

$$[a,b] \xrightarrow{\phi} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$f \in C([c,d])$.

$$\int_c^d f(t)\,dt$$

Kan se på $f \circ \phi$ som nå er kont. på $[a,b]$. Er det en sammenheng mellom $\int_a^b (f\circ\phi)$ og $\int_c^d f$?

Eks:

$$[0,1] \xrightarrow{\phi} [0,2] \xrightarrow{f}$$

$f(t) = 1$, $\phi(t) = 2t$.

$$\int_0^2 1\,dt = 2$$

$$\int_0^1 1 \cdot 2\,dt.$$

Teorem: La $[a,b]$ og $[c,d]$ være intervaller, og la $\phi : [a,b] \to [c,d]$ være deriverbar med $\phi(a) = c$ og $\phi(b) = d$. Da

$$\int_c^d f(t)\,dt = \int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt.$$

Dersom $\phi(a) = d$ og $\phi(b) = c$,

$$\int_c^d f(t)\,dt = -\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt.$$

Bevis for $\pm$ likhet for integraler:

Anta $a=c=0$ og $b=d=1$.

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\phi(t))$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_0^1 F(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1{}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 F(r_2(\phi(t))) \cdot (\vec{r}_2(\phi(t)))'$$

$$= \int_0^1 F(\vec{r}_2(\phi(t))) \cdot \vec{r}_2{}'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt.$$

$$= \pm \int_0^1 F(\vec{r}_2(t)) \cdot \vec{r}_2{}'(t)\, dt = \pm \int_C \vec{F}\, d\vec{r}_2.$$

Skifte-av-variabel-formel

$$\int_0^1 f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt$$