Matriseligninger

Se på ligningssystem:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots\cdots \; a_{mn}x_n = b_m.$$

Observer at dersom vi setter

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \qquad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

så er ligningssystemet ekvivalent med ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$.

<u>SETNING 4.4.1</u>: La A være en $(m \times n)$-matrise og la $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, og dann matrisen $B = [A \; \vec{b}]$. Anta at $B \sim C$ der C er på trappeform.

(i) Dersom siste søyle i C er pivot har ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ ingen løsninger.

Ellers har vi

(ii) Dersom alle søyler i C er pivot har vi nøyaktig en løsning,

(iii) Dersom minst en annen søyle ikke er pivot har vi uendelig mange løsninger.

Eks: La $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hvor mange løsninger har $A\vec{x} = \vec{b}$.

Lag $B = [A\ \vec{b}]$.

C = radredusert B.

```
>> A=[2 -1 -2 5;0 1 2 -1;1 -1 -2 3]

A =

     2    -1    -2     5
     0     1     2    -1
     1    -1    -2     3

>> b=[1;1;0]

b =

     1
     1
     0

>> B=[A b]

B =

     2    -1    -2     5     1
     0     1     2    -1     1
     1    -1    -2     3     0

>> rref(B)

ans =

     1     0     0     2     1
     0     1     2    -1     1
     0     0     0     0     0
```

Ser at siste søyle ikke er pivot, og søyle 3 er heller ikke pivot, så vi har uendelig mange løsninger.

Finn løsningene:

$$x + 2w = 1$$
$$y + 2z - w = 1$$

$y = 1 + w - 2z$

$x = 1 - 2w$

z og w kan være hva som helst; de er frie variable.

1 0 0 2 . . .
0 1 0 1 1 1
0 0 1 7

$x = 2$

$y = 1/?$

Homogene ligninger

La A være en $(m \times n)$-matrise og la $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Anta at $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{y}$, løser

ligningen $A\vec{x} = A\vec{y} = \vec{b}$

$$\Leftrightarrow \quad A\vec{x} - A\vec{y} = \vec{b} - \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A(\underbrace{\vec{x} - \vec{y}}_{= \vec{w}}) = 0$$

Så det betyr at ligningen $\underbrace{A\vec{w} = 0}$

har en ikke-triviell løsning.

Kalles en homogen ligning.

Omvendt: Antat at $\vec{x}$ e en løsning til ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$, og anta at $\vec{w}$ løses den homogene ligningen $A\vec{w} = \vec{0}$.

Se at $A(\vec{x} + \vec{w}) =$

$$A\vec{x} + A\vec{w} = \vec{b} + \vec{0}$$
$$= \vec{b}.$$

Disse to tingene sammen: Du kan finne alle løsninger til $A\vec{x} = \vec{b}$ ved å finne en løsning og så legge til alle løsninger til den homogene ligningen $A\vec{x} = \vec{0}$.

$A\vec{x} = \vec{b}$.

Simultane ligninger

Anta at vi har en $(m \times n)$-matrise A, vektorer $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ og vil løse ligningen $A\vec{x} = \vec{b}_j$ for $j = 1, \dots, k$.

Sett $B = [\, A \; \vec{b}_1 \; \vec{b}_2 \; \vec{b}_3 \dots \vec{b}_k \,]$

$C = \text{rref}(B)$.

Løsningene (hvis de fins) kan leses av

4.5 INVERSE MATRISER

DEF: La A være en $(n \times n)$-matrise. Vi sier at A er inverti̲bel dersom det fins en $(n \times n)$-matrise B s.a. $A \cdot B = I$ og $B \cdot A = I$.

Kaller da B for den inverse matrisa til A, eller "A invers", og betegner den gjerne med A^{-1}.

Merk: Anta at A er invertibel og vi vil løse $A\vec{x} = \vec{b}$.

Sett $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

$$A\vec{x} = A(A^{-1}\vec{b})$$
$$= (AA^{-1})\vec{b}$$
$$= I \cdot \vec{b} = \vec{b},$$

SETNING 4.5.3 Anta at A e en $(n\times n)$-matrise og at B es en $(n\times n)$-matrise med $AB=I$. Da es $BA=I$. Så A e inverhibel.

(Bevis komme).

SETNING 4.5.4: En $(n\times n)$-matrise A er inverhibel huiss ligningen $A\vec{x}=\vec{c}$ hav en entydig løsning for alle $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$.

BEVIS: (i) Anta at A er inverhibel. Som vi hav sett løse $\vec{x}=A^{-1}\vec{c}$ ligningen, så det fins minst en løsning. Må vise at det ikke fins fler.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}}_{n}\Bigg\}n$$

Vet at ligningen hav en løsning for alle $\vec{c}$ huiss alle rade rref(A) inneholdv et pivot-element. Siden A e kvadratisk betyr det at alle søyle også hav pivotelementer, og igjen betyr at løsningen e entydig.

$\vec{e}_1=(1,0,\dots,0)$
$\vec{e}_2=(0,1,\dots,0)$
$\vdots$
$\vec{e}_n=(0,\dots,0,1)$.

(ii) Anta nå at man kan løse $A\vec{x}=\vec{c}$ for alle $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$. La nå $\vec{b}_j$ løse ligningen $A\vec{x}=\vec{e}_j$ for $j=1,\dots,n$. La $B=[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \cdots\ \vec{b}_n]$.

Da hav vi

$$A\cdot B=[A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2\ \dots\ A\vec{b}_n]$$
$$=[\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \cdots\ \vec{e}_n]$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & 0\\ 0 & 0 & & 1\end{bmatrix}=I.$$

Ved SETNING 4.5.3 es A inverhibel

DVS: A es inverhibel $\Leftrightarrow$ rref$(A)=I$.

apr 4-10:56

Hvordan finne A^{-1}?

Er ute etter B s.a

$AB = I$. Dersom vi skriver $B = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n]$,

har vi $AB = [A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2 \dots A\vec{b}_n]$.

Så vi vil ha $A\vec{b}_j = \vec{e}_j$ for $j = 1, \dots, n$.

Så vi må løse ligningen $A\vec{b}_j = \vec{e}_j$ for $j = 1, \dots, n$.

$$B = [A\ \vec{e}_1\ \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n] = [A\ I].$$

Løsningen er nå de n siste søylene i $\mathrm{rref}(B)$, og den inverse er altså $(n \times n)$-matrisen i $\mathrm{rref}(B)$ helt til høyre.

Bevis for SETNING 4.5.3.

(A $(n \times n)$-matrise , $AB = I \Rightarrow BA = I$).

Anta altså $AB = I$, og må vise $BA = I$.

$$AB \cdot A = I \cdot A \Rightarrow ABA = A$$
$$\Leftrightarrow A \cdot \underbrace{(BA)}_{\text{Kall denne matrisen } C.} = A.$$

Vet at det fins en annen matrise med samme egenskap som (BA), nemlig $A \cdot I = A$.

Skal nå vise at det bare fins en matrise C med egenskapen $AC = A$.

Skriv $C = [\vec{c}_1\ \vec{c}_2 \dots \vec{c}_n]$

$$A \cdot C = [A\vec{c}_1\ A\vec{c}_2 \dots A\vec{c}_n] = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n].$$

Så det holder nå å vise at

$AB = I \Rightarrow A\vec{x} = \vec{d}$ har entydig løsning for alle $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$.

Siden A er kvadratisk holder det som i sted å vise at $A\vec{x} = \vec{d}$ har en løsning for alle $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$.

$$AB = I \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\vec{a}_j = \vec{e}_i$$

for alle $i = 1, .., n$.

Observer at $\vec{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \vec{e}_i$

Har at $\vec{d} = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \cdot \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i b_{ji}\right) \cdot \vec{a}_j$,

så vektoren
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} d_i b_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} d_i b_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} d_i b_{ni} \end{pmatrix}$$

løser ligningen. $\blacksquare$

apr 4-11:39