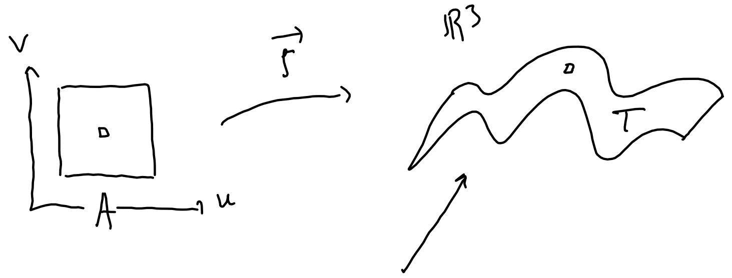


$$\text{areal} = \iint \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)(u,v) \right| \, du \, dv .$$

<u>DEF</u>: Anta at T er en flate parametrisert ved $\vec{r}(u,v)$ for $(u,v) \in A$, og anta at f er kontinuerlig på T. Da er

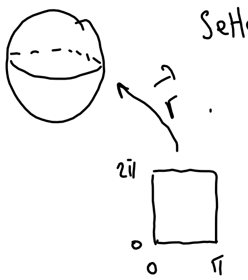
$$\iint_T f \, dS := \iint_A f(\vec{r}(u,v)) \cdot \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)(u,v) \right| \, du \, dv.$$

Merk: Dette er uavhengig av valg av parametrisering.

<u>Eks</u>: La $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

$f(x,y,z) = z^2$.

Regn ut $\iint_T f \, dS$.



Setter $\vec{r}(\phi, \theta) = (\sin\phi \cdot \cos\theta, \sin\phi \cdot \sin\theta, \cos\phi)$.

$\phi \in [0, \pi]$

$\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\left| \frac{\partial r}{\partial \phi}(\phi,\theta) \times \frac{\partial r}{\partial \theta}(\phi,\theta) \right| = \sin\phi .$$

Får
$$\iint_T f \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2\phi \cdot \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\phi \sin\phi \, d\phi .$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3} \cos^3\phi \right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}} .$$

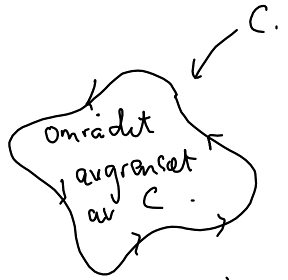
6.5 GREEN'S TEOREM

Analysens fundamentalteorem

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Dvs: Det er en sammenheng mellom integralet til en derivert på et intervall, og verdien i endepunktene.

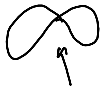
I to variable:



La $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ være en lukket og enkel kurve.

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

- lukket : $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$
- enkel : $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ når $t_1 \neq t_2$.



La $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ være et vektorfelt definert nær C.

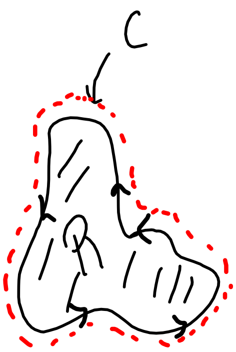
$$\int_C \vec{F}\,d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \left(P(\vec{r}(t)), Q(\vec{r}(t))\right) \cdot \left(x'(t), y'(t)\right) dt$$

$$= \int_a^b P(\vec{r}(t)) \cdot x'(t) + Q(\vec{r}(t)) \cdot y'(t)\,dt.$$

Motivert av dette er det vanlig å skrive

$$\int_C \vec{F}\,d\vec{r} =: \int_C P\,dx + Q\,dy.$$



Teorem 6.5.1: Anta at C er en enkel lukket kurve gitt ved en stykkevis glatt parametrisering. La R betegne området avgrenset av C. Dersom P og Q har kontinuerlige partiellderiverte på et område som inneholder R, så er

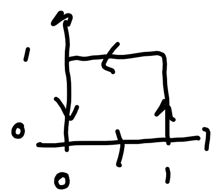
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

der C er orientert mot klokka.

Eks 1: $R = [0,1] \times [0,1]$

C = randa til R

$\vec{F}(x,y) = \underbrace{x^2 y}_{P}\, dx + \underbrace{xy^3}_{Q}\, dy$.



$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 y^3 - x^2 \, dx\,dy.$$

$$= \underline{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}.$$

mar 7-10:34

Eks 2: La C være ellipsen $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$, og la R være området avgrenset av C. Finn arealet til R.

$$\text{Areal}(R) = \iint_R dx\,dy.$$

Skal bruke Green's Teorem andre veien.

Sett $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{2}(\underset{P}{\underset{\uparrow}{-y}}\,dx + \underset{Q}{\underset{\uparrow}{x}}\,dy)$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \iint_R 1\cdot dx\,dy = \text{Areal}(R).$$

Parametrisering av C: $\vec{r}(t) = (a\cdot\cos t,\, b\cdot\sin t)$
$t \in [0, 2\pi]$.

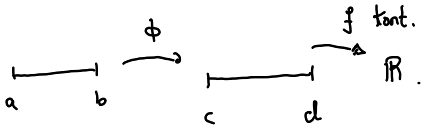
$$\text{Areal}(R) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cdot\cos t\cdot b\cdot\cos t + b\cdot\sin t\cdot a\cdot\sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cdot b\,\overbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}^{=1}\,dt$$

$$= \underline{\underline{a\cdot b\cdot\pi}}.$$

6.7. Skifte av variabel i dobbeltintegraler.

1 variabel

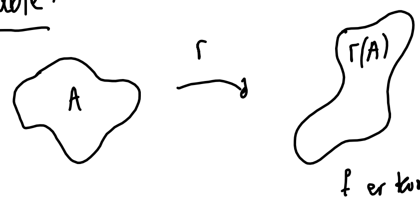


$\phi: [a,b] \to [c,d]$ er en avb. med kont. derivert og anta at $\phi(a)=c$ og $\phi(b)=d$.

$\int_c^d f(x)\,dx$?

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\cdot \phi'(t)\,dt.$$

I to variable:



f er kont. på r(A).

Skal relatere $\iint_{r(A)} f(x,y)\,dx\,dy$ til et integral over A.

Ser at r er en parametrisering av flaten $\vec{r}(A)$.

Skriv $\vec{r}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ 0)$

Fra i sted:

$$\iint_{r(A)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(\vec{r}(u,v))\cdot\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\right|du\,dv$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i\cdot 0 - j\cdot 0 + k\cdot \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Få

$$\boxed{\iint_{\vec{r}(A)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(\vec{r}(u,v))\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}\,du\,dv.}$$

$$= \iint_A f(\vec{r}(u,v))\cdot\left|\det \vec{r}\,'(u,v)\right|du\,dv$$

$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

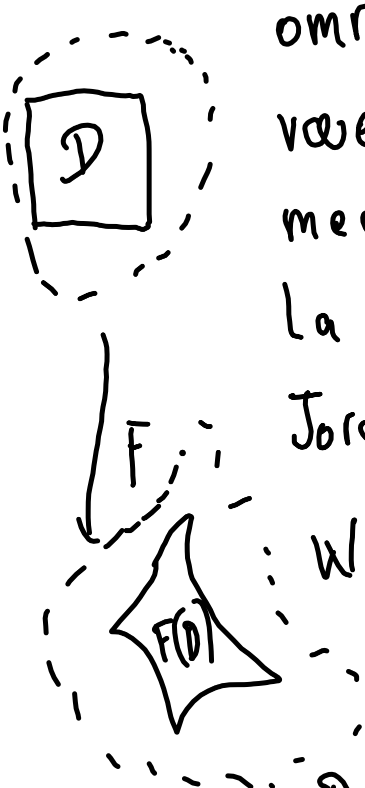
$$r'(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt.}$$

mar 7-11:24

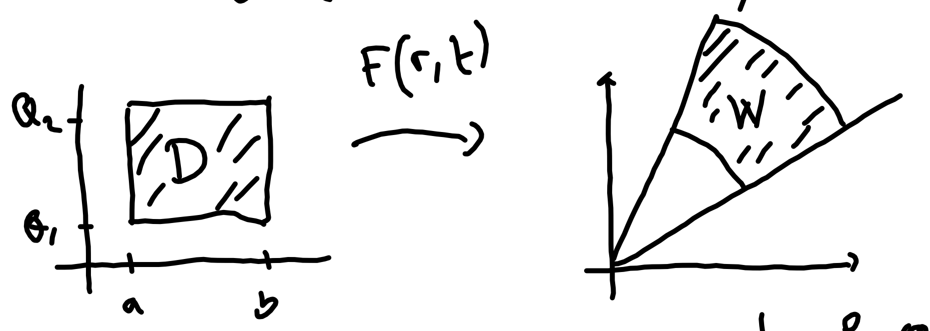
<u>DEF</u>: En begrenset mengde $D \subset \mathbb{R}^2$ sies å være Jordan-målbar dersom 1_D er integrerbar på D.

<u>SETNING</u>: La $U \subset \mathbb{R}^2$ være et åpent område, og la $F : U \to \mathbb{R}^2$ være en injektiv avbilding med kontinuerlige partiell-deriverte. La $D \subset U$ være et lukket Jordan-målbart område, skriv $W := F(D)$, og la $f : W \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig.



Da er
$$\iint_W f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(F(u,v))\,\left|\det F'(u,v)\right|\,du\,dv$$

Eks: La W være området som i polarkoordinater er beskrevet ved $a \le r \le b$, $\theta_1 \le t \le \theta_2$.



$$F(r,t) = (r\cos t, r\sin t)$$

La f være kont. på W.

$$\iint_W f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cdot\cos t, r\sin t)\cdot\left|\det F'(r,t)\right| dr\,dt$$

$$= \iint_D f(r\cdot\cos t, r\sin t)\, r \cdot dr\,dt.$$

$$F'(r,t) = \begin{bmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{bmatrix}$$

$$\det F'(r,t) = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r.$$