4.6. Lineærkombinasjoner og baser

La $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, og la $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Når kan vi skrive

$$\vec{b} = \underbrace{x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n}_{\text{lineær-kombinasjon.}},$$

der $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$?

Observer: $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n]$
$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

$$A\vec{x} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n .$$

Så spørsmålet over er det samme som: når kan vi løse ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$?

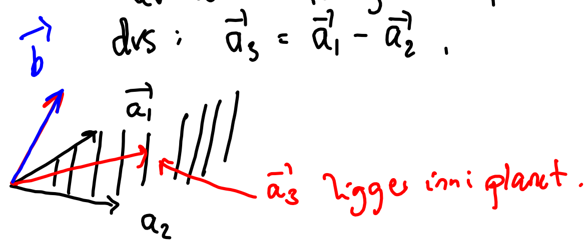
Man danner $[A \ \vec{b}]$ og radredusere.

Eks: La $\vec{a}_1 = (1,2,1)$, $\vec{a}_2 = (1,1,0)$, $\vec{a}_3 = (0,1,1)$, $\vec{b} = (1,2,3)$.
Kan $\vec{b}$ skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ og $\vec{a}_3$.

```
>> A=[1 1 0 1;2 1 1 2;1 0 1 3]

A =

     1     1     0     1
     2     1     1     2
     1     0     1     3

>> rref(A)

ans =

     1     0     1     0
     0     1    -1     0
     0     0     0     1
```

Ser at siste søyle er pivot, så det er umulig.

Ser at tredje søyle kan skrives som en lineærkombi. av de to foregående, dvs: $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$.



apr 7-10:13

SETNING 4.6.1 La $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

For å sjekke om $\vec{b}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_j$'ene radreduserer vi $B = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n \, \vec{b}]$ til trappeform C, og da gjelder:

(i) Dersom siste søyle i C er pivot går det ikke,

ellers,

(ii) Dersom alle andre søyler er pivot kan du gjøre det på nøyaktig en måte,

(iii) dersom minst en annen søyle ikke er pivot kan du gjøre det på uendelig mange måter.

SETNING 4.6.2 Anta at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ og at $[\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n] \sim C$ som er en trappematrise.
Da kan alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_j$'ene hviss alle radene i C inneholder pivotelementer.

DEF: La $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$. Da definerer vi <u>spennet</u> til vektorene $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$

$$\text{Span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^n : \vec{b} \text{ er en lineærkombinasjon av } \vec{a}_j\text{'ene}\}.$$

Fra tidl. eks:

$$\text{Span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \text{Span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\},$$

som er et 2-dim. plan i $\mathbb{R}^3$.

Dette betyr at vektoren $\vec{a}_3$ i en forstand er "overflødig", og det leder oss inn på neste tema:

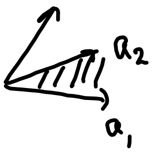
(Merk at hvilkensomhelst av vektorene $\vec{a}_j$ er "overflødig".)

<u>Lineær uavhengighet</u>

Viste at $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

Dette er et eksempel på det vi kaller en lineær avhengighetsrelasjon.

<u>DEF 4.6.4</u>: Vi sier at $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengig dersom enhver $\vec{b} \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ kan skrives entydig som en lineærkombinasjon av $\vec{v}_j$'ene.



Entydig betyr: hvis $\vec{b} \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$,

$$\vec{b} = x_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n$$

$$\vec{b} = y_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{v}_n,$$

så er $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \dots,\ x_n = y_n$.

SETNING 4.6.5 $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ er lineært uavhengige hviss følgende holder:

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \vec{0}.$$

Bevis: Lag $A = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n]$.

$$A\vec{x} = A\vec{y} \implies \vec{x} = \vec{y}$$

$$\Updownarrow,$$

$$A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \implies \vec{x} - \vec{y} = 0.$$

Er ekvivalente utsagn siden alle løsninger til en ligning $A\vec{x} = \vec{b}$, er på formen $\vec{y} + \vec{w}$, der $\vec{y}$ er en løsning til ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$, og $\vec{w}$ er en løsning til $A\vec{x} = \vec{0}$.

SETNING 4.6.6 Søylene i en $(m \times n)$-matrise A er lineært uavhengige hviss alle søylene i rref(A) inneholde pivot-elementer.

```
>> A=[1 2 7 5;4 3 5 6;9 8 7 6]

A =

   1   2   7   5
   4   3   5   6
   9   8   7   6
```

$\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3 \quad \vec{v}_4$

```
>> rref(A)

ans =

   1.0000        0        0   1.8200
        0   1.0000        0  -2.2600
        0        0   1.0000   1.1000
```

$B = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3]$

$\vec{c} = (5,6,6)$.

For å forsøke å løse $B\vec{x} = \vec{c}$ radredusere vi $A = [B\ \vec{c}]$.

ikke en pivot søyle, så $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4\}$ e ikke lineært uavhengig.

Se $\vec{v}_4 = 1{,}82 \cdot \vec{v}_1 \div 2{,}26 \cdot \vec{v}_2 + 1{,}1 \vec{v}_3$.

Så $\vec{0} =$ ______ " ______ $\div \vec{v}_4$.

Observer: Siden matrise over hadde 3 rader og 4 søyle, kunne vi si uten å radredusere at vektorene var lineært avhengige siden det ikke e plass til pivotelementer i hver søyle.

Korollar 4.6.7: En lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}^n$ består av n eller færre vektorer.

apr 7-11:17

<u>SETNING 4.6.8</u> La $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ forskjellige fra null. Da fins alltid en undermengde

$$\{\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_k}\}, \quad k \le m,$$

s.a.

(i) $\text{Span}\{\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}\} = \text{Span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$

(ii) $\{\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}\}$ e lineært uavhengige.

<u>Bevis</u>: $A = [\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \dots \; \vec{a}_n]$.

$B = \text{rref}(A)$.

$$B = \begin{array}{cccccc} 1 & ? & ? & - & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? & ? & ? \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & ? & ? \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \cdots & & 0 & & ? \end{array}$$

La $\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_n}$ være søylene i A som tilsvarer pivot-søylene i B.

<u>Observer</u>: $\{\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_n}\}$ e lineært uavhengige, fordi at hvis du radserer $[\vec{a}_{i_1} \; \vec{a}_{i_2} \cdots \vec{a}_{i_n}]$, så får alle søyla pivotelemente.

Også: Dersom $\vec{b}_j$ e en pivotsøyle, men $\vec{b}_{j+1}$ ikke er det, så kan $\vec{b}_{j+1}$ skrives som en lineær-kombinasjon av $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j$, så $\vec{a}_{j+1}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j$. Så vi forandre ikke spennet ved å kaste ut $\vec{a}_{j+1}$.

BASISER

DEF 4.6.9 : En basis for $\mathbb{R}^n$ er en mengde vektorer $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ som utspenner $\mathbb{R}^n$, dvs. at for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ kan vi skrive

$$\vec{b} = x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n \; .$$

SETNING 4.6.10: La A være en $(n \times n)$-matrise. Da er søylene i A en basis for $\mathbb{R}^n$ hviss $\text{rref}(A) = I$.

$A = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n]$.

Bevis: Det at alle vektorer $\vec{b}$ skal kunne skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{v}_j$'ene, det er det samme som at matriseligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ kan løses for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n \iff \text{rref}(A) = I$.