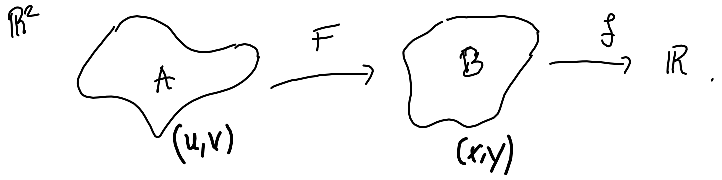
Skifte av variabel



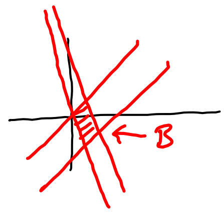
$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(F(u,v))\,|\det F'(u,v)|\,du\,dv.$$

Eks 1: La B være området i $\mathbb{R}^2$ begrenset av linjene

(i) $y = x$, $y = x-1$,

(ii) $y = -3x$, $y = 1-3x$.

La $f(x,y) = y-x$.



Ønsker å finne en avbildning F fra et rektangel A på B: Fra (i) $x-1 \leq y \leq x$

$-1 \leq y-x \leq 0$

Fra (ii) $-3x \leq y \leq 1-3x$

$0 \leq y+3x \leq 1$.

Setter så $u = y-x$

$v = y+3x$

Får at: $v-u = 4x$

$x = \frac{1}{4}(v-u)$

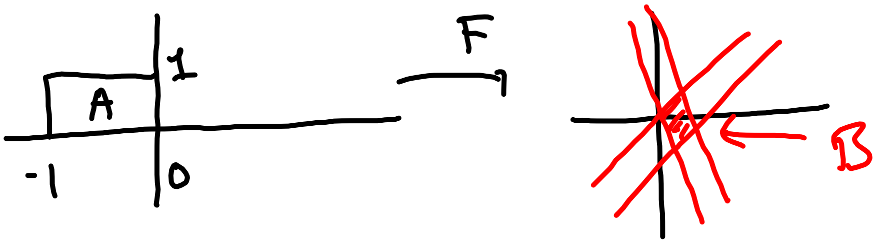
$v+3u = y+3y = 4y$

$y = \frac{1}{4}(v+3u)$.

Så dersom vi setter $F(u,v) = \left(\frac{1}{4}(v-u), \frac{1}{4}(v+3u)\right)$, så har vi at F avbilder rektangelet

$A = [-1,0]\times[0,1]$ på B.

mar 10-10:13



$f(x,y) = y - x.$

$$F(u,v) = \left(\tfrac{1}{4}(v-u),\ \tfrac{1}{4}(v+3u) \right).$$

- $f(F(u,v)) = \tfrac{1}{4}(v+3u) - \tfrac{1}{4}(v-u) = u.$

- Jacobi-determinant:

$$F'(u,v) = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left| \det F'(u,v) \right| = \frac{1}{16} \cdot |-4| = \frac{1}{4}.$$

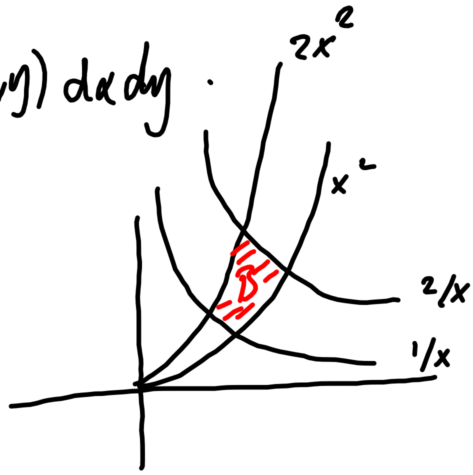
$$\iint_B y - x \, dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} u \cdot \frac{1}{4} \, du\,dv = -\frac{1}{8}.$$

Eks 2: . La B være området i $\mathbb{R}^2$ avgrenset av kurvene

$\frac{1}{x}$ og $\frac{2}{x}$, og x^2 og $2x^2$.

· La $f(x,y) = x^3y^3$.

Finn $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$.



Bruker samme fremgangsmåte som i Eks 1.

- $\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \rightarrow 1 \leq xy \leq 2$.
- $x^2 \leq y \leq 2x^2 \rightarrow 1 \leq y/x^2 \leq 2$.

Sette $u = x \cdot y$

$v = y/x^2$

Må uttrykke x og y ved hjelp av u og v.

- Se at $u/v = x^3$ så $x = \left(\frac{u}{v}\right)^{1/3}$
- Se at $u^2 \cdot v = y^3$ så $y = (u^2v)^{1/3}$.

Så vi setter $F(u,v) = \left(\left(\frac{u}{v}\right)^{1/3}, (u^2 v)^{1/3} \right)$.

- $f(F(u,v)) = \frac{u}{v} \cdot u^2 \cdot v = u^3$,

- Jacobi-determinant:

$$F'(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{u}{v}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{v} & -\frac{1}{3}\left(\frac{u}{v}\right)^{-2/3} \frac{u}{v^2} \\ \frac{1}{3}(u^2 v)^{-2/3} 2uv & \frac{1}{3}(u^2 v)^{-2/3} \cdot u^2 \end{bmatrix}$$

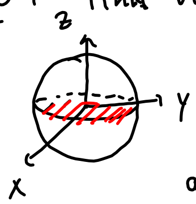
$$\det F'(u,v) = \frac{1}{9} u^{-2/3} \cdot u^{-4/3} \cdot u^{2} \cdot v^{2/3} \cdot v^{-1} \cdot v^{-2/3}$$

$$+ \frac{2}{9} u^{-2/3} \cdot u\, u^{-4/3} \cdot u \cdot v^{2/3}\, v^{-2} \cdot v^{-2/3}\, v$$

$$= \frac{1}{9} v^{-1} + \frac{2}{9} v^{-1} = \frac{1}{3} v^{-1}.$$

$$\iint_B x^3 y^3 \,dx\,dy = \frac{1}{3} \int_1^2 \int_1^2 u^3 \cdot \frac{1}{v} \,du\,dv = \dots$$

Eks 3: Finn volumet av en kule med radius 1.



Se at vi kan skrive øvre halvdel av randa som en graf $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

over $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$.

$$\frac{1}{2} \cdot \text{Volumet} = \iint_B \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \,dx\,dy.$$

Skifte til polar-koordinater $F: [0,1] \times [0,2\pi] \to B$,
der $F(r,t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$.

$$\iint_B \sqrt{1 - x^2 - y^2} \,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - r^2} \cdot r \,dr\,dt$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1 - r^2)^{1/2} \cdot r \,dr = 2\pi \left[\frac{2}{3}(1 - r^2)^{3/2} \cdot -\frac{1}{2} \right]_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{6} = \frac{2\pi}{3},$$

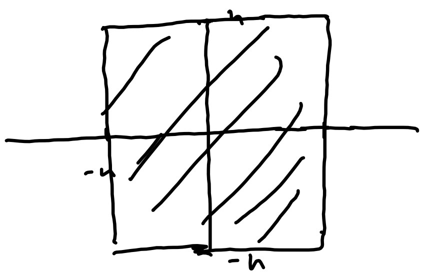
mar 10-10:46

6.6.: Teorem: La $A \subset \mathbb{R}^2$ være en lukket begrenset mengde som er Jordan-målbar. Da er enhver kontinuerlig funksjon integrerbar over A.

6.8. UEGENTLIGE INTEGRALER

Ønsker nå å integrere funksjoner over ubegrensede områder i $\mathbb{R}^2$.

$$K_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq n\}.$$



Se at boksene K_n blir større og større, og fyller ut $\mathbb{R}^2$ når $n \to \infty$.

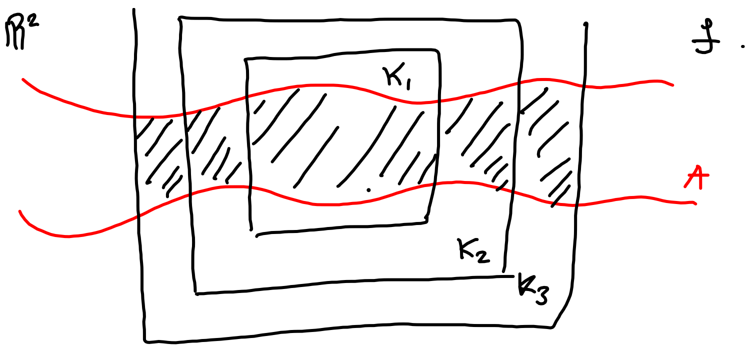
DEF: La $A \subset \mathbb{R}^2$ være en mengde s.a. $K_n \cap A$ er Jordan målbar for alle $n \in \mathbb{N}$, og la f være en kontinuerlig, ikke-negativ funksjon på A.

Vi setter

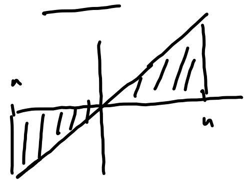
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{A \cap K_n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Dersom $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy < \infty$ sier vi at integralet konvergerer, og ellers sier vi at integralet divergerer.

mar 10-11:22



Eks 1: (1-variabel) La $f(x) = x$.



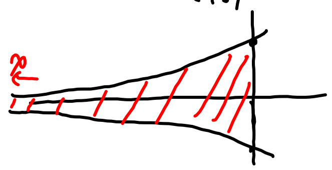
$$\int_{-n}^{n} x\,dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x\,dx = 0.$$

Men vil ikke at f skal være integrerbar.

Eks 2: $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in(-\infty,0], -e^x \le y \le e^x\}$.

$f(x,y) = -x$. Avgjør om integralet konvergerer eller divergerer.



$$\iint_{A\cap K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-n}^{0}\left(\int_{-e^x}^{e^x} -x\,dy\right) dx$$

$$= \int_{-n}^{0} \left[-xy\right]_{-e^x}^{e^x} dx = \int_{-n}^{0} -xe^x - xe^x\,dx$$

$$= -2\underbrace{\int_{-n}^{0} x e^x\,dx}.$$

$u = x \quad v' = e^x$

$u' = 1 \quad v = e^x$

$$\int_{-n}^{0} xe^x\,dx = \left[xe^x\right]_{-n}^{0} - \int_{-n}^{0} e^x\,dx$$

$$= -ne^{-n} - \left[e^x\right]_{-n}^{0}$$

$$= -ne^{-n} - 1 + e^{-n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n \cap A} -x \, dx\,dy = \lim_{n\to\infty} -2\,[\underbrace{-ne^{-n}}_{\to 0} - 1 + \underbrace{e^{-n}}_{\to 0}] = 2.$$

Konvergens eller divergens?

Eksponensialfunksjonen vokser __veldig__ mye raskere enn ethvert polynom, så

$$\lim_{n\to\infty} ne^{-n} = 0. \quad \text{(L'Hôpitals regel).}$$

Så integralet konvergerer.

Kan også bruke kuler: $B(0,n) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < n^2\}$.

__Setning__: La $A \subset \mathbb{R}^2$ være en mengde s.a. $A \cap B(0,n)$ er Jordan-målbar for alle $n \in \mathbb{N}$, og la f være en ikke-negativ kont. funksjon på A. Da er

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{A\cap B(0,n)} f(x,y)\,dx\,dy.$$