<u>DEF</u> En basis for $\mathbb{R}^m$ er en lineært uavhengig mengde vektorer $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ som utspenner hele $\mathbb{R}^m$.

(Må da ha at $n = m$)

<u>Setning 4.6.10</u>

Hvis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$ så er disse en basis hvis og bare hviss matrisen $A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m]$ er rekke ekvivalent med I_m ($\mathrm{rref}(A) = I_m$)

<u>Bevis</u> ble tatt 7/4.

Korollar 4.6.11

Anta $a_1, \ldots, a_m$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$

Dersom vektorene enten er lineært uavhengig eller utspenner $\mathbb{R}^n$ så danner de en basis.

Bevis

$A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m]$ (søylene i A er $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$). $D = rref(A$ (den reduserte til A)

~~Hvis~~ Søylene i A er lineært uavhengige hvis og bare alle søyler i D er pivotsøyler (4.6.6)

Der kvadratiske så $D = I_m$ altså er $a_1, \ldots, a_m$ en basis (4.6.13)

Omvendt hvis $\{a_1, \ldots, a_m\}$ utspenner $\mathbb{R}^m$ er det samme som at alle rekker i D har et pivotelement. Igjen vil da $D = I_m$

Så $a_1, \ldots, a_m$ er en basis.

Setning 4.6.12

La $\vec{a}_1, .., \vec{a}_n$ $(n<m)$ være lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^m$
da fins $\vec{a}_{n+1}, .., \vec{a}_m$ slik at
$\vec{a}_1, .., \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, .., \vec{a}_m$ danner en basis for $\mathbb{R}^m$

Bevis

$A = [\vec{a}_1, .., \vec{a}_n]$ ($m \times n$-matrise)

$C = \mathrm{rref}(A)$. Siden $\vec{a}_1, .., \vec{a}_n$ er lineært uavhengig ~~har C~~ er alle søyler i C pivotsøyler (4.6.6).

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{m} \begin{matrix} \}\, n \\ \\ \}\, m-n \end{matrix}, \quad \underset{\text{rekkeoperasjoner}}{A \sim C}$$

$C \sim A$ ↪ andre rekkeoperasjoner

$$I_m = \left[\begin{array}{c|c} C & \begin{matrix} 0 \\ \hline 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \underset{\text{rekkeoperasjoner}}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} A & \vec{a}_{n+1}, .., \vec{a}_m \end{array}\right]$$

$$= \left[\vec{a}_1, .., \vec{a}_n \,\vdots\, \vec{a}_{n+1}, .., \vec{a}_m\right] = A'$$

siden $A' \sim I_m$ så danner søylene en basis den $\vec{a}_1, .., \vec{a}_n$ altså er de n-første søylene

Anta nå vi har gitt en lineæravb.

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dvs.

i) $T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$

ii) $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$

La nå $v_1, \ldots, v_n$ være en basis for $\mathbb{R}^n$

Gitt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ så fins entydige bestemte

$c_1, \ldots, c_n$ s.a. $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$

Da må ⊛ $T(\vec{x}) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \cdots + c_n T(\vec{v}_n)$

Betyr at T er bestemt av

$w_i = T(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$

Oppsummerer

Setning 6.13 Gitt basis $v_1, \ldots, v_n$

for $\mathbb{R}^n$ og vektorer $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^m$

Så fins en entydig bestemt lineæravb.

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, slik at $T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n$

(nemlig den bestemt av ⊛)

(Lett å vise at avbildningen bestemt

av ⊛ er en lineæravbildning.)

I $\mathbb{R}^m$ lett å se at

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

danner en basis $\left([e_1, \ldots, e_m] = I_m \right)$
kalles standardbasisen i $\mathbb{R}^m$

—

Anta nå istedet at vi har en
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som har en basis
$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ av egenvektorer (med tilhørende
egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) $T(v_i) = \lambda_i v_i$

$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 + \ldots + c_n \vec{v}_n$

$\cap$
$\mathbb{R}^n$, $T(\vec{x}) = c_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + c_n \lambda_n v_n$

$T^2(\vec{x}) = T(T(\vec{x})) = c_1 \lambda_1^2 v_1 + \ldots + c_n \lambda_n^2 v_n$

$\underbrace{T(T \cdots T}_{k}(\vec{x}))) = T^k(\vec{x}) = c_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + \ldots + c_n \lambda_n^k v_n$

Elementære matriser

DEF En elementær matrise en matrise som fremkommer ved å utføre én enkel radoperasjon på identitetsmatrisen I_n

Eks

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Setning (4.8.2)

La A være en $m \times n$ matrise og E en $m \times m$ elementær matrise. La $A' = EA$. Da er A' den matrisen vi får fra A ved å bruke den radoperasjonen på A som korresponderer til E.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Setning (4.8.9)

Enhver elementær matrise er inverterbar med en invers som også er en elementær

__Bevis__

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{én rekkeoperasjon}"'] & B \arrow[l, bend left, "\text{én annen rekkeoperasjon}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I_m \arrow[r, "\text{én rekkeoperasjon}"] & E \arrow[l, bend left, "\text{én annen}"] \end{tikzcd}$$

→ svarer til en annen elementær matrise F

Fra foregående setning $FE = I_m$

$F = E^{-1}$

Setning (4.8.4)

La A være en $m \times n$ matrise

$\left(A \underset{\text{rekkeoperasjon}}{\sim} B\right) \quad B = \mathrm{rref}(A)$

Da kan vi skrive

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k B$$

der $E_1, \ldots, E_k$ er elementære matriser

<u>Bevis</u>

Fins $F_1, \ldots, F_k$ elementære matriser slik at $B = F_k F_{k-1} \cdots F_1 A$ (4.8.2)

$$A = F_1^{-1} \cdots F_{k-1}^{-1} F_k^{-1} B, \quad E_i = F_i^{-1}$$

som er elementær matris, får da

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k B$$

(Hvis A er invertbar kvadratisk matrise)
$B = I_m$, $A = E_1 \cdots E_k$)

Setning (4.8.5)

Den transponerte til en elementær matrise E er en elementær matrise

Hvis E svarer til å multiplisere en linje med en konstant så er $E^T = E$

Om E svarer til å bytte om to linjer i I_n så er E symmetrisk, $E^T = E$

Om E svarer til å multiplisere linje i med m og legge til linje j, så svarer E^T til å multiplisere linje j med m og legge til linje i

Setning La A være $m \times n$-matrise

$B = \text{rref}(A)$, $A = E_1 \cdots E_k B$

der E_i er elementære. Da er

$$A^T = B^T E_k^T \cdots E_1^T$$

Bevis Bruk at $(CD)^T = D^T C^T$ flere ganger.

Determinanter til en kvadratisk matrise.

Vi har $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Induktiv definisjon.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Generell definisjon la oss anta at vi har definert determinant av $(n-1)\times(n-1)$ matriser. Da definerer vi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots\cdots (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

Eks

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -1 + 1 - (1 + 2) = \underline{-3}$$