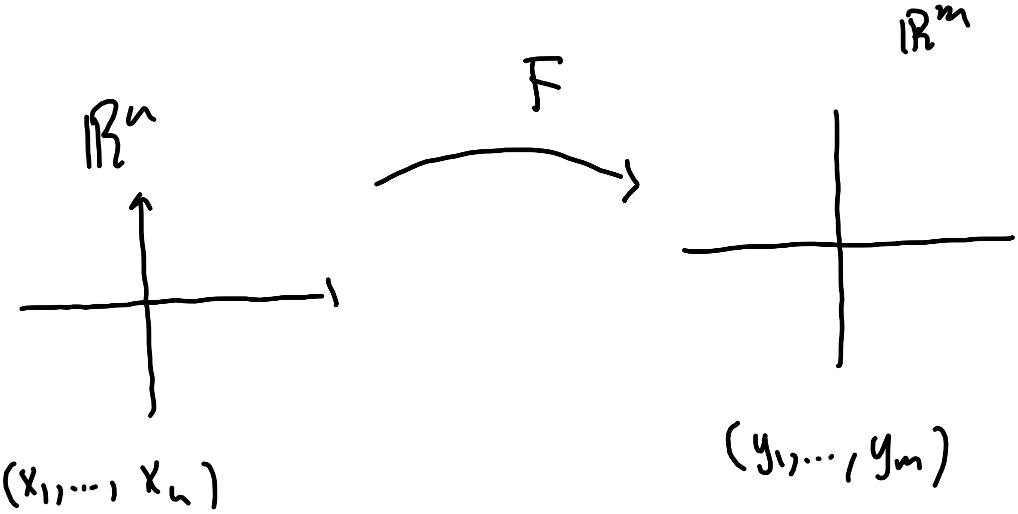
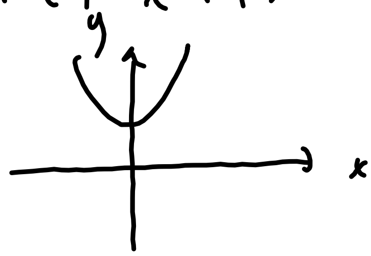
Lineæravbildinger

En avbildning (elle en funksjon) $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en regel som for ethvert punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tilordne et punkt $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$.

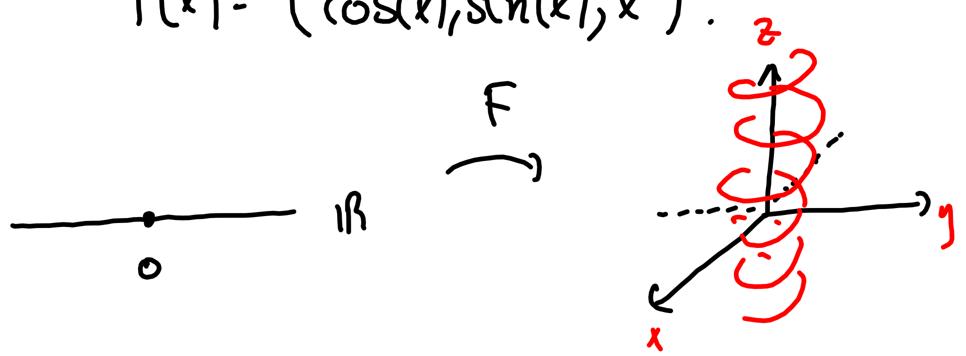


Eks1: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + 1$.



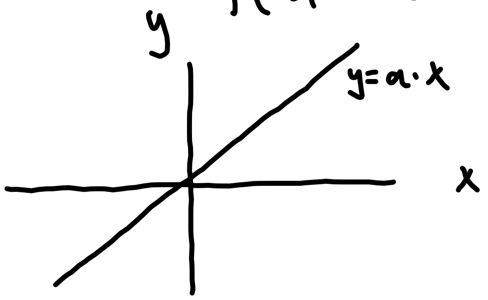
Eks: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$F(x) = (\cos(x), \sin(x), x).$$



Enklest mulig: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = a \cdot x \quad , \quad a \neq 0 .$$



lineæravbilding.

<u>DEF 1.9.1</u> : En avbilding/funksjon $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles en <u>lineæravbilding</u> dersom

(i) $T(c \cdot \vec{x}) = c \cdot T(\vec{x})$,

(ii) $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$,

for alle $c \in \mathbb{R}$ og $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Sjekk Eks. over: (i) $f(c \cdot x) = a \cdot (c \cdot x)$

$$= a \cdot c \cdot x = c \cdot a \cdot x$$
$$= c(ax)$$
$$= c \cdot f(x)$$

(ii) Sjekk selv.

Eks: La A være en $(m \times n)$-matrise.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Eks: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Husk at A kan ganges fra venstre med en $(n \times 1)$-matrise, dvs. en vektor i $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$(a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n ,$$

$$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n , \dots ,$$

$$a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n) .$$

Så slik multiplikasjon gir en avbilding fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$.

SETNING 1.9.3: Alle slike avbildinger er lineæravbildinger.

Setning 1.9.4: Anta at $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbilding. Da fins en $(m\times n)$-matrise A s.a. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Videre,

$$A = [\, T(\vec{e}_1) \; T(\vec{e}_2) \; \ldots \; T(\vec{e}_n) \,]$$

søyler i A.

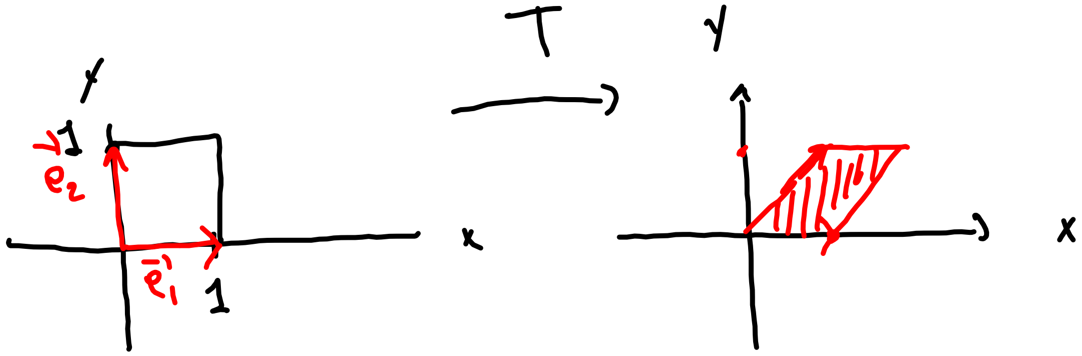
Husk: $\vec{e}_j = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots,0)$.

$\vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$, 1 på j'te plass.

Eks: (illustrerer idee i bevis)

Finn en lineæravbilding $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbilder $[0,1]\times[0,1]$ på parallellogrammet utspent av $\vec{v}_1 = (1,0)$ og $\vec{v}_2 = (1,1)$,

jan 13-10:58



$[0,1]\times[0,1]$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1] \text{ og } y\in[0,1]\}$, $\vec{v}_1 = (1,0)$. $\vec{v}_2 = (1,1)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Generelt prinsipp: La A være en $(m\times n)$ matrise $A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_n]$.

Da er: $A\cdot\vec{e}_j = \vec{a}_j$.

Bevis for 1.9.4:

Definw $A := [\, T(\vec{e}_1) \; T(\vec{e}_2) \; \dots \; T(\vec{e}_n) \,]$.

Vil vise at $A\vec{x} = T(\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Sjekk først: $\boxed{A \cdot \vec{e}_j = T(\vec{e}_j) \text{ for alle } j.}$

Videre

$$A(\vec{x}) = A(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n)$$

$$= x_1 \cdot A\vec{e}_1 + x_2 \cdot A\vec{e}_2 + \dots + x_n A\vec{e}_n$$

$$= x_1 \cdot T(\vec{e}_1) + x_2 \cdot T(e_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n)$$

$$= T(x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n) = T(\vec{x}).$$

<u>Eks:</u> Anta at vi vil løse

$$5x + 3y + 2z = 1.$$
$$x - 2y + z = 3.$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{A.} \mathbb{R}^2 \ni (1,3)$$

Hvis vi nå definerer en matrise A som følger:

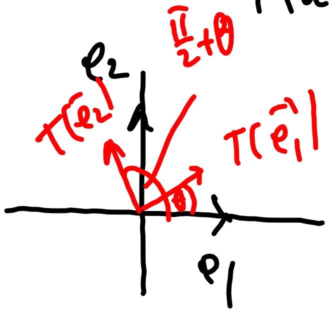
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

og ser på lineæravb. $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

Ser at det å løse ligningssettet over er det samme som å finne et punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s.a. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>Eks</u>: Finn en lineæravb. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer alle vektorer med en vinkel θ.

Må finne $T(\vec{e}_1)$ og $T(e_2)$.



$$T(\vec{e}_1) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad T(e_2) = \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right), \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$