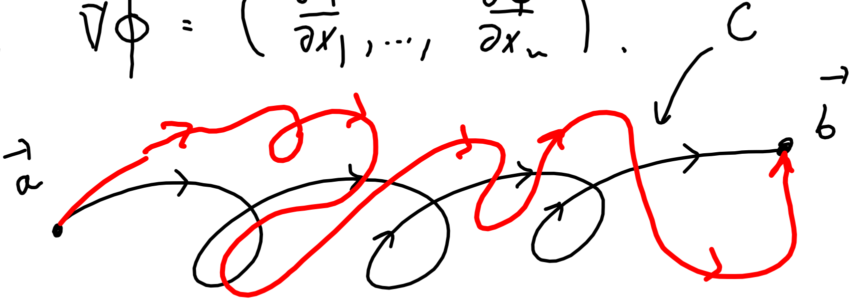
Mer om konservative vektorfelter.

ϕ , $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)$.

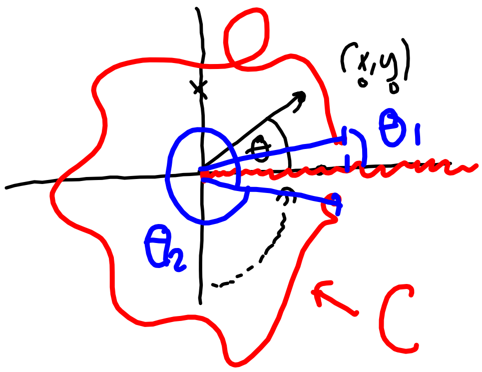


$$\int_C \nabla\phi = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}).$$

HUSK:

Eks:

$\mathbb{R}^2$.



$\phi(x,y) = \arg((x,y))$

$\phi(1,0) = 0$

$\phi(x_0, y_0) = \frac{\pi}{4}$

$\phi(0,1) = \frac{\pi}{2}$

$\phi(-1,0) = \pi$

$\phi(0,-1) = \frac{3\pi}{2}$

$\phi(1,0) = 2\pi$

ϕ er veldefinert og deriverbar på

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y=0 \text{ og } x \geq 0\}.$$

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \theta_2 - \theta_1 .$$

Det hadde vært bra om vi kunne finne et "enkelt" kriterie for å avgjøre om et vektorfelt er konservativt.

$$F = \nabla\phi = \left(\overset{f_1}{\frac{\partial\phi}{\partial x_1}}, \overset{f_2}{\frac{\partial\phi}{\partial x_2}}, \dots, \overset{f_n}{\frac{\partial\phi}{\partial x_n}} \right).$$

Husk: $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i}$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

<u>SETNING</u>: La $F = (f_1, .., f_n)$ være et konservativt vektorfelt på et område $A \subset \mathbb{R}^n$. Da har vi

$$(*) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

for alle $i = 1, .., n$ og $j = 1, .., n$.

<u>Eks</u>: La $F(x,y) = (\underbrace{2xy + y^2}_{f_1}, \underbrace{x^2 + 6y^5 + 2xy}_{f_2})$.

Avgjør om F er konservativt.

Sjekker først om vi har $(*)$.

Må sjekke om $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$

$$\underset{2x+2y}{\parallel} \qquad \underset{2x+2y}{\parallel}.$$

<u>ok</u>!

Forsøker å finne et potensial:

Ønsker: $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + y^2$ (i)

$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + 6y^5 + 2xy$ (ii)

(i) $\phi(x,y) = x^2y + y^2x + c \cdot y^m$

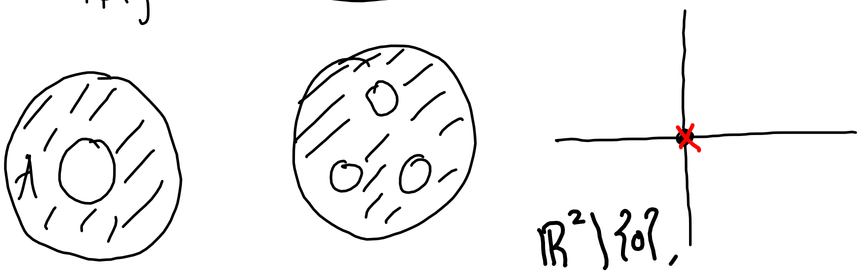
Sjekk: $\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + 2yx$ Ser at det er ok om vi slenger på y^6.

<u>Svar</u>: $\phi(x,y) = x^2y + y^2x + y^6$.

<u>OK</u>

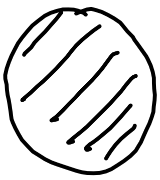
DEF: Et område A i $\mathbb{R}^2$ er enkelt-sammenhengende dersom det ikke har noen hull.

Eks: Følgende e <u>ikke</u> enkelt-sammenhengende:

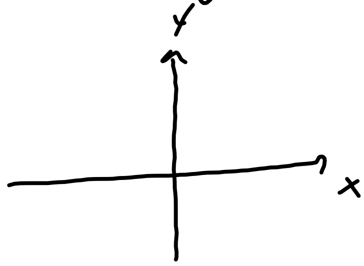


$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

Eks: Følgende <u>e</u> enkeltsammenhengende:



$\mathbb{R}^2$



SETNING: La $\vec{F} = (f_1, f_2)$ være et deriverbart vektorfelt på et enkeltsammenhengende område A i $\mathbb{R}^2$. Anta at

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

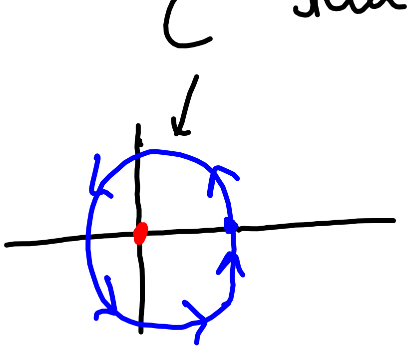
Da e $\vec{F}$ konservativt.

Spesielt har vi at $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ over en lukket kurve C e lik null.

<u>Eks:</u> Merk at selv om argument-funksjonen ϕ definert tidligere e <u>umulig</u> å definere på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, e $\nabla\phi$ veldefinert på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ siden den deriverte av en konstant es 0.

Sett $\vec{F} = \nabla\phi$ på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

$$\underset{\displaystyle (f_1, f_2)}{\overset{\shortparallel}{\vec{F}}}$$

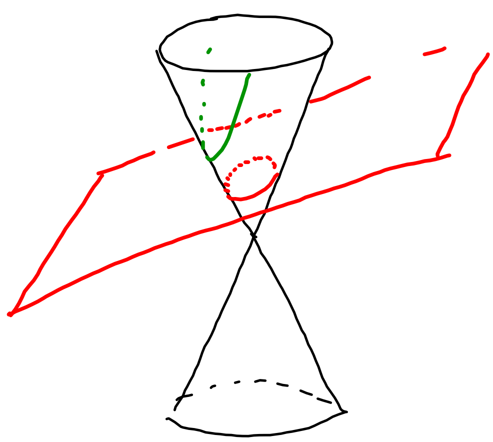


Siden $\vec{F}$ e en gradient må

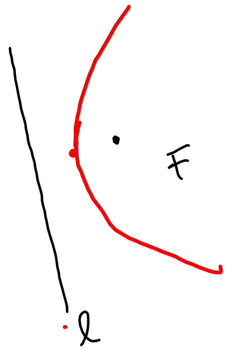
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

3.6. Kjeglesnitt

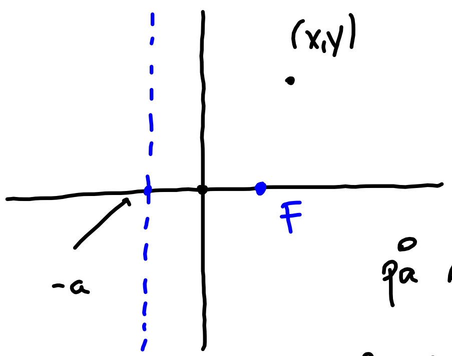


Parabel:



La l være en rett linje i $\mathbb{R}^2$ og la F være et punkt utenfor l.

Parabelen med styringslinje l og brennpunkt F er mengden av alle punkter P i $\mathbb{R}^2$ s.a. avstanden fra P til F er den samme som avstanden fra P til l.



La nå $l = \{(-a,y) : y \in \mathbb{R}\}$, og la $F = (a,0)$.

Anta at (x,y) ligger på parabelen.

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

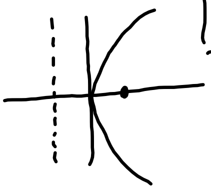
$$y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2$$

$$= \cancel{x^2} + 2ax + \cancel{a^2} - [\cancel{x^2} - 2ax + \cancel{a^2}]$$

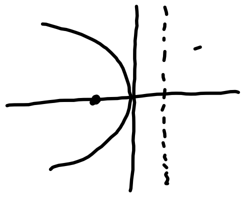
$$y^2 = 4ax \, .$$

SETNING: Parabelen med styringslinje $\{x=-a\}$ og brennpunkt $(a,0)$ er mengden av punkter som tilfredsstiller ligningen

$$y^2 = 4ax.$$

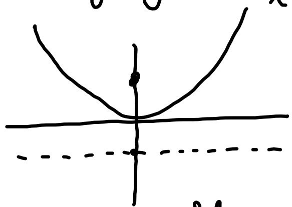


Kan også velge $a<0$



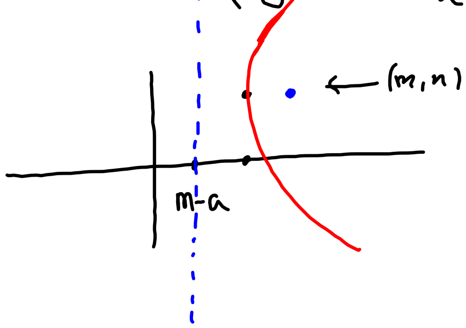
- Man kan også bytte om rollene til x og y. $x^2 = 4ay$

$a>0$



Kan også sentrere parabelen i et punkt (m,n):

$$(y-n)^2 = 4a(x-m).$$



Styringslinje: $\{x=m-a\}$.
Brennpunkt: $(m+a,n)$.

Eks: $y^2 - 2y - 2x + 5 = 0$.

Vis at dette beskriver en parabel.
Finn senter, styringslinje og brennpunkt.

feb 14-11:59