Uegentlige integraler

Eks: Regn ut $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-n}^{n} e^{-y^2}dy}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy}$$

$$= \sqrt{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy}.$$

Vi kan også integrere over kuler og ta en grense:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{B(0,n)} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$$

(Polarkoordinater: $(r\cos t, r\sin t)$)

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{n} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \int_0^{n} r e^{-r^2}\,dr$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \cdot \left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \cdot \left[\underbrace{-\tfrac{1}{2}e^{-n^2}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \tfrac{1}{2}\right]$$

$= \pi$. Så $\underline{\underline{I = \sqrt{\pi}}}$.

mar 14-10:13

Generelle funksjoner

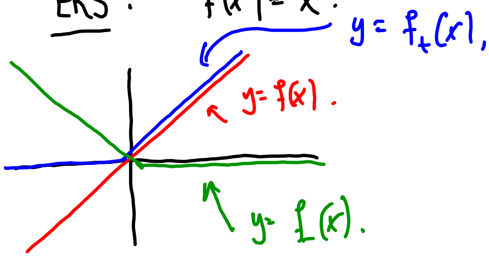
La $f : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon.

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } f(x) > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{for } f(x) < 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Har at $f = f_+ - f_-$.

Eks: $f(x) = x$.



DEF: La A være en delmengde av $\mathbb{R}^2$ s.a. $A \cap K_n$ er Jordan målbar for alle $n \in \mathbb{N}$. La $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon.

Vi sier at $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ konvergerer dersom både $\iint_A f_+(x,y)\,dx\,dy$ og $\iint_A f_-(x,y)\,dx\,dy$ konvergerer, og vi definerer

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f_+(x,y)\,dx\,dy - \iint_A f_-(x,y)\,dx\,dy$$

Eks: $\int_{-n}^{n} x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-n}^{n} = 0$.

La nå $f(x) = x$.

Er f integrerbar over $\mathbb{R}$?

$$\int_{-n}^{n} f_+(x)\,dx = \frac{n^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

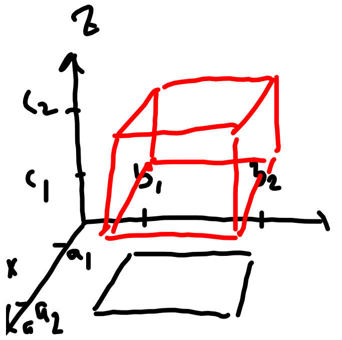
$$\int_{-n}^{n} f_-(x)\,dx = \frac{n^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Ingen av integralene konvergerer, så f er ikke integrerbar.

6.9 Trippel-integraler

- Definerer integralet fullstendig analogt med det 2-dimensjonale tilfellet via øvre og nedre trappesummer, men med bokser istedet for rektangler.

Setning 6.9.2: La $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ være en rektangulær boks i $\mathbb{R}^3$, og la f være kontinuerlig på R. Da er f integrerbar på R og



$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

Integrasjonsrekkefølgen er vilkårlig.

Eks: La $R = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$,
og la $f(x,y,z) = x^2yz^3$.

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 x^2yz^3\,dz \right)}_{\frac{1}{4}\cdot x^2y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{1}{4}x^2y\,dy \right)}_{1/4\, 1/2\cdot x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{8}x^2\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}.$$

Analogt med Type 1-områder i $\mathbb{R}^2$:

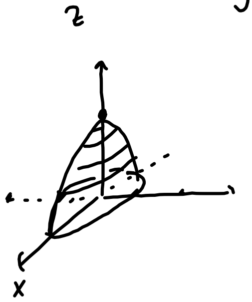
<u>SETNING 6.9.5:</u> Anta at A er et begrenset og lukket Jordan-målbart område i $\mathbb{R}^2$, og anta at $g, h : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige funksjoner med $g(x,y) \leq h(x,y)$ for alle $(x,y) \in A$. La S være området mellom de to grafene:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}.$$

Da er enhver kontinuerlig f på A integrerbar og

$$\iint_A \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy \quad .$$

Eks 2: La A være området avgrenset av (x,y)-planet og $z = 1-(\frac{x}{2})^2 - y^2$. Regn ut $\iiint_A y^2 \, dx\,dy\,dz$.



For $z=0$ er $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 1$.

Sett B = området i (x,y)-planet avgrenset av ellipsen $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 1$.

Har: $$\iiint_A y^2 \, dx\,dy\,dz = \iint_B \left(\int_0^{1-(\frac{x}{2})^2 - y^2} y^2 \, dz \right) dx\,dy.$$

$$= \iint_B y^2 \left[z \right]_0^{1-(\frac{x}{2})^2-y^2} dx\,dy$$

$$= \iint_B y^2 \cdot \left(1 - (\tfrac{x}{2})^2 - y^2\right) dx\,dy.$$

(Ellipsekoordinater: $(2r\cos t, r\sin t)$, $r \in [0,1]$, $t \in [0, 2\pi]$, Jacobideterminant $= 2r$).

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t \cdot \left(1 - \left(\frac{2r\cos t}{2}\right)^2 - r^2\sin^2 t\right) \cdot 2r \, dt\,dr$$

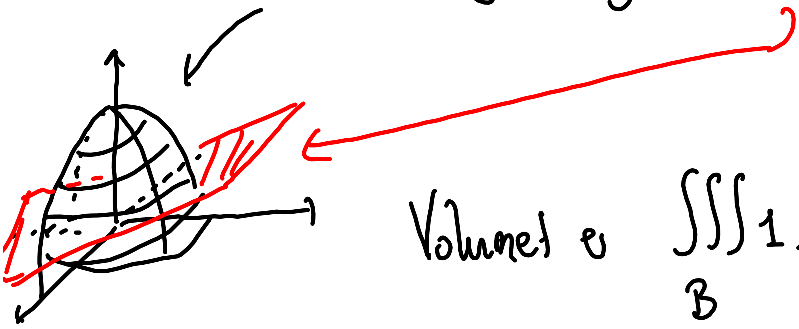
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t \left(1 - r^2\right) \cdot 2r \, dt\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^3(1-r^2) \cdot \underbrace{\sin^2 t}_{= \frac{1-\cos(2t)}{2}} \, dr\,dt$$

$= \cdots\cdots$.

Eks 3: Regn ut volumet til området A som er avgrenset av flatene

$z = 2 - x^2 - y^2$ og $z = 2x + 2y$.



Volumet er $\iiint_B 1 \, dx\,dy\,dz$.

Skal finne området A i (x,y)-planet

Så $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; (x,y) \in A, \ 2x+2y \leq z \leq 2-x^2-y^2\}$.

- Må finne ut hva som er x- og y-koordinater der flatene skjærer hverandre.

$$2 - x^2 - y^2 = 2x + 2y$$

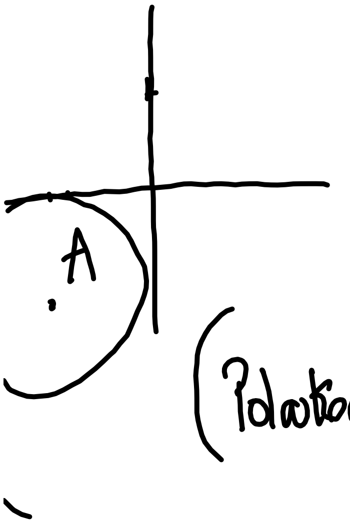
$$\Leftrightarrow \quad 2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = (x+1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 = (x+1)^2 + (y+1)^2 .$$

Ser at A er området avgrenset av sirkelen med radius 2 med senter $(-1,-1)$.

$$\text{Volumet} = \iint_A \left(\int_{2x+2y}^{2-x^2-y^2} dz \right) dx\,dy.$$



$$= \iint_A 2 - x^2 - y^2 - 2x - 2y \; dx\,dy.$$

(Polarkoordinater $x = -1 + 2r\cos t$, $y = -1 + 2r\sin t$.
Jacobi $= 4 \cdot r$.)

$$= \iint_A 4 - (x+1)^2 - (y+1)^2 \, dx\,dy.$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(4 - \left(4r^2\cos^2 t + 4r^2\sin^2 t\right)\right) 4r \, dt\,dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4 - 4r^2) \cdot 4r \, dt\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 (4 - 4r^2) 4r \, dr = \ldots$$

6.10 SKIFTE AV VARIABLE I TRIPPELINTEGRALET

SETNING: La U være et åpent område i $\mathbb{R}^3$ og la $T: U \to \mathbb{R}^3$ være en injektiv kontinuerlig avbilding med kontinuerlige partiellderiverte. La $A \subset U$ være Jordan-målbar, og sett $B = T(A)$. For alle kontinuerlige funksjoner f på B har vi da at

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A f(T(u,v,w)) \cdot \left| \det T'(u,v,w) \right| du\,dv\,dw.$$

$$T'(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} (u,v,w).$$

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$