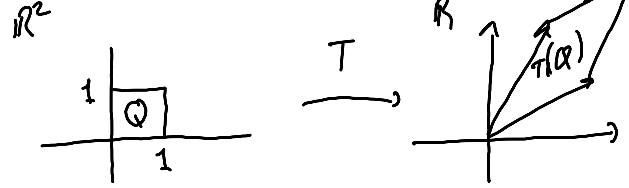
$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

- $T(c \cdot \vec{x}) = c \cdot T(\vec{x})$ $\quad c \in \mathbb{R}$
- $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$. $\quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

LINEÆRAVBILDINGER OG AREALER

La $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være lineær,

dvs. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ for en (2×2)-matrise A.

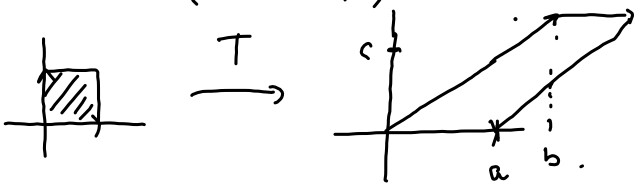


$Q = [0,1] \times [0,1]$.

Spørsmål: Hva er arealet til $T(Q)$?

(**Eks:** $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$f(x) = a \cdot x$, $a \in \mathbb{R}$.)

Anta at $T(\vec{e}_1) = (a, 0)$
$T(\vec{e}_2) = (b, c)$



$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ Se at Arealet til $T(Q)$ er $a \cdot c = \det(A)$.

SETNING: DERSOM $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ER EN LINEÆRAVBILDING SÅ FORSTØRRER T AREALER MED EN FAKTOR $|\det(A)|$, DER A ER STANDARDMATRISEN TIL T.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

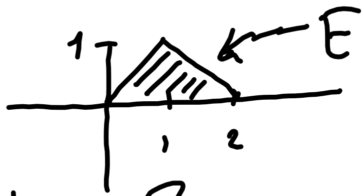
SAMME GJELDER FRA $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

jan 17-10:06

Eks: La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ og

anta at A avbilder en

figur F på



Hva er arealet til F?

Har at $\text{Areal}(E) = |\det(A)| \cdot \text{Areal}(F)$.

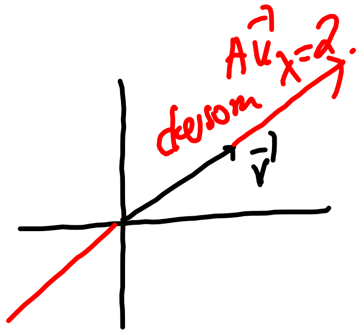
$$\text{Areal}(F) = \frac{1}{|\det(A)|} \cdot 1 .$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} .$$

EGENVERDIER OG EGENVEKTORER.

DEF: La A være en $(n \times n)$-matrise.

(i) En vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, sies å være en egenvektor dersom det fins $\lambda \in \mathbb{R}$ s.a. $A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.



(ii) λ kalles egenverdien tilhørende egenvektoren $\vec{v}$.

<u>Eks:</u> $A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$

La $\vec{v}_1 = (1,1)$ og $\vec{v}_2 = (1,-1)$.
Vis at $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er egenvektorer for A og finn egenverdiene.

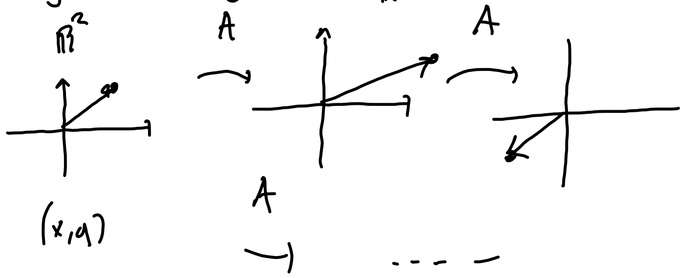
(a) $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Så $A\vec{v}_1 = \vec{v}_1 = 1\cdot\vec{v}_1$, så $\vec{v}_1$ er en egenvektor med egenverdi $\lambda_1 = 1$.

(b) $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Så $A\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\cdot\vec{v}_2$, så $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Dynamiske systemer i $\mathbb{R}^2$



$\vec{x}_0 \xrightarrow{A} A\vec{x} \xrightarrow{A} A(A\vec{x}) = A^2\vec{x} = \dots\dots A^k\cdot\vec{x}$.

Hva skjer når $k \to \infty$?
(avhengig av startpunktet $\vec{x}$).

<u>Eks:</u> La $\vec{x}_0 = (3,1)$.
Observer at $x_0 = 2\cdot\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

$$
\begin{aligned}
A\vec{x}_0 &= A(2\cdot\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\
&= 2\cdot A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 \\
&= 2\cdot\lambda_1\cdot\vec{v}_1 + \lambda_2\cdot\vec{v}_2 \\
&= 2\cdot 1\cdot\vec{v}_1 + \tfrac{1}{2}\cdot\vec{v}_2, \\
A(A\vec{x}_0) &= 2\cdot 1^2\cdot\vec{v}_1 + (\tfrac{1}{2})^2\cdot\vec{v}_2
\end{aligned}
$$

$\lim_{k\to\infty} A^k\cdot\vec{x}_0 =$

$2\cdot\vec{v}_1 + \cancel{(\tfrac{1}{2})^k\cdot\vec{v}_2}$,

$\lim_{k\to\infty}$; $(\tfrac{1}{2})^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$= 2\cdot v_1 = (2,2)$.

jan 17-10:46

Algoritme: La A være en (2×2)-matrise.
Gitt et punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ ønsker vi
å beskrive $\lim_{k\to\infty} A^k \cdot x_0$.

(i) Finn egenvektore $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$
for A med egenverdier λ_1 og λ_2.
(hvis mulig).

lineærkombinasjon

(ii) Skriv x_0 som en sum av
$\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$, dvs. finn c_1, c_2
s.a. $c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{x}_0$.

(iii)
$$A^k \vec{x}_0 = A^k \left(c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 \right)$$
$$= c_1 \cdot A^k \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot A^k \vec{v}_2$$
$$= c_1 \cdot \lambda_1^k \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \lambda_2^k \cdot \vec{v}_2,$$

1.10 Affinavbildinger

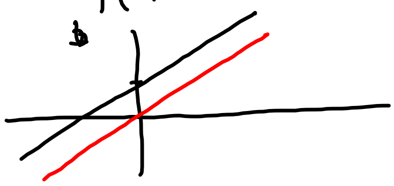
$T(c\cdot\vec{x}) = c\cdot T(\vec{x})$

$T(\vec{0}) = \vec{0}$.

DEF: En avbilding

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles en affinavbilding dersom det fins en $(m\times n)$-matrise A og vektor $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$ s.a. $F(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$.

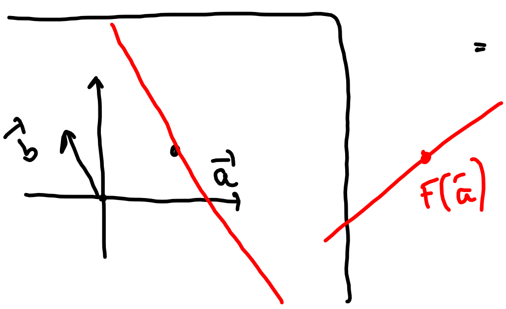
Eks: $f(x) = ax+b$. $a,b\in\mathbb{R}$.



Setning 1.10.2 Anta at $F(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$ er en affinavbilding og la $\vec{r}(t) = \vec{a} + t\cdot\vec{b}$, $t\in\mathbb{R}$, være en linje $\mathcal{L}$.

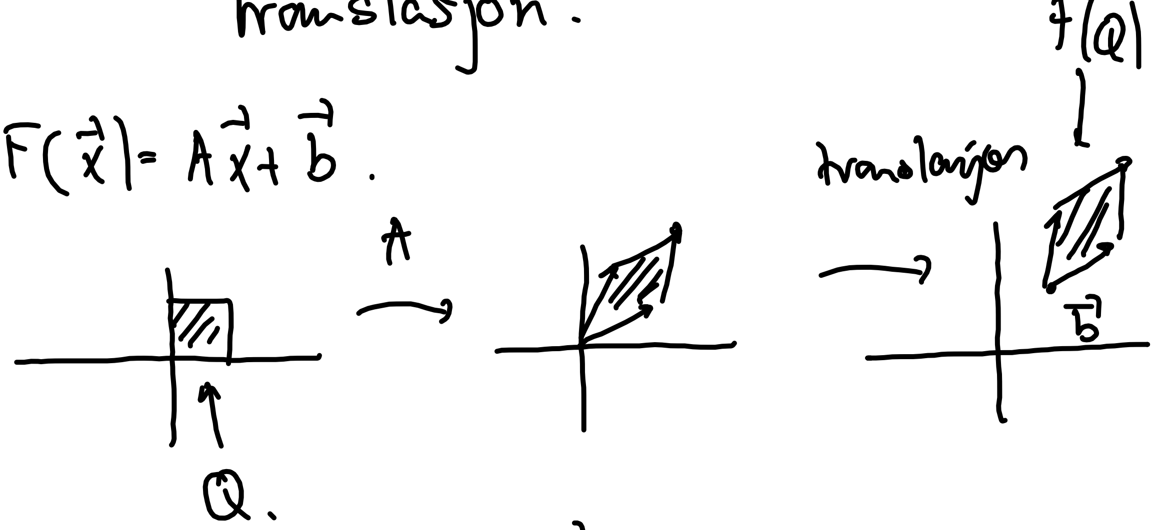
Dersom $A\vec{b}\neq 0$ er bildet $F(\mathcal{L})$ en rett linje som går gjennom $F(\vec{a})$ med retning $A(\vec{b})$.

Bevis:
$$\begin{aligned}
F(\vec{a}+t\cdot\vec{b}) &= A(\vec{a}+t\vec{b}) + \vec{c}\\
&= A\vec{a} + t\cdot A\vec{b} + \vec{c}\\
&= A\vec{a}+\vec{c} + t\cdot A\vec{b}\\
&= F(\vec{a}) + t\cdot A\vec{b}.
\end{aligned}$$



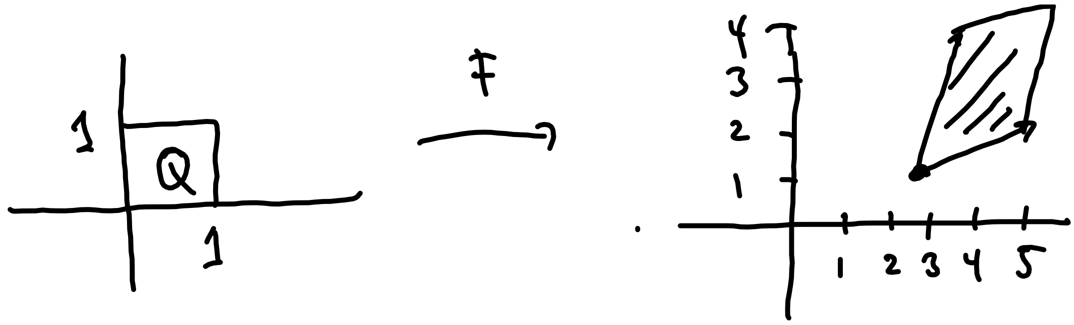
MERK: Forskjellen på en lineæravb. og en affinavb. er en translasjon.

$F(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$.



En avb. $F(x) = x + \vec{b}$ kalles en translasjon.

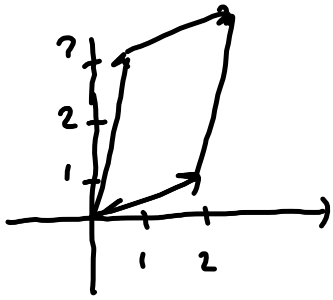
Eks: Finn matrisen og konstantleddet til en affinavbilding som avbilder



Kombinasjon av to ting:

(i) Lineæravb.

$Q \xrightarrow{A}$



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(ii) Konstantledd e (3,1).