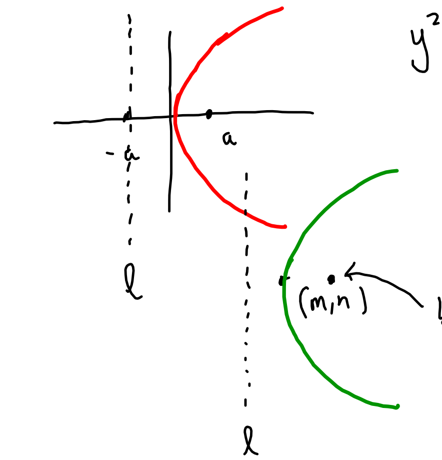
Parabler



$$y^2 = 4a \cdot x$$

$$(y-n)^2 = 4a \cdot (x-m).$$

Eks: $y^2 - 2y - 2x + 5 = 0 \quad (*)$

Vis at ligningen beskriver en parabel, finn sentrum, styringslinje og brennpunkt.

$(*)$ $$(y-1)^2 - 1 - 2x + 5 = 0$$

$$(y-1)^2 - 2x + 4 = 0$$

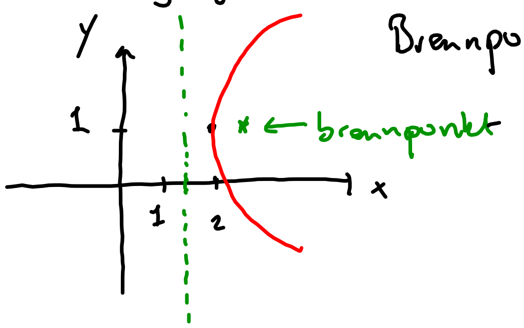
$$(y-1)^2 - 2(x-2) = 0$$

$$(y-1)^2 = 2(x-2) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-2).$$

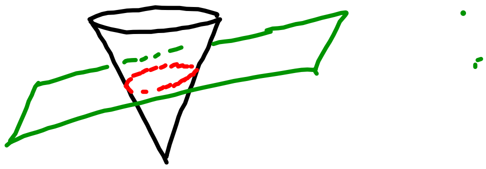
Senter: $(2,1)$.

Styringslinje: $\{(\frac{3}{2}, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Brennpunkt: $(\frac{5}{2}, 1)$.



Ellipser

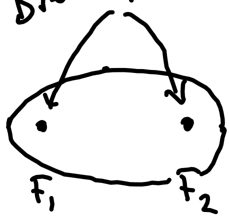


$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 .$$

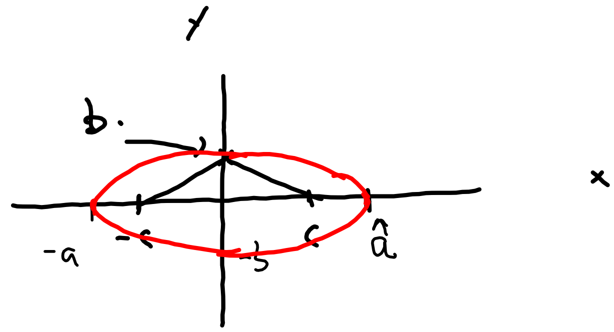
DEF: La F_1 og F_2 være to punkter i planet, og la $a > 0$ s.a. $2a$ er større en avstanden mellom F_1 og F_2.

En ellpse er definert som mengden av alle punker P s.a. $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.

Brennpunkter.



Setter opp:



Sett $F_1 = (-c, 0)$

$F_2 = (c, 0)$

Velg $a > c$.

La b >0 være punktet på y-aksen s.a. avstanden fra $(0,b)$ til $(c,0) = a$.

Pythagoras: $c^2 + b^2 = a^2$

$b^2 = a^2 - c^2$.

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$,

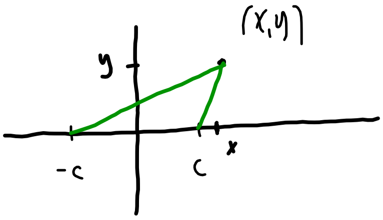
Snitt med x-aksen:

$(x-c) + (x+c) = 2a$

$2x = 2a$

$x = a$.

- a kalles store halvakse
- b kalles lille halvakse



$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{4}xc = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc.$$

$$\Rightarrow \quad a^2(x^2\cancel{-2xc}+c^2+y^2) = a^4 \cancel{-2a^2xc} + x^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2x^2 + a^2y^2 = \underbrace{a^4 - a^2c^2}_{\substack{a^2(a^2-c^2) \\ = a^2b^2}} + x^2c^2$$

$$\boxed{b^2=a^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{a^2x^2 - x^2c^2}_{\substack{x^2(a^2-c^2) \\ = x^2b^2}} + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

SETNING 3.6.3: Ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

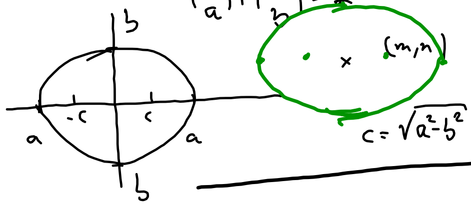
beskriver en ellipse med sentrum i origo og halvakser a og b.
Dersom $a \geq b$ er brennpunktene $(-c,0)$ og $(c,0)$ med $c^2 = a^2 - b^2$,
og dersom $b \geq a$ er brennpunktene $(0,-c)$ og $(0,c)$ med $c^2 = b^2 - a^2$.

Dersom $a = b$ beskriver ligningen en sirkel med radius a.

$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2$

$x^2 + y^2 = a^2$,

$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$



$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Brennpunkter: $(m-c, n)$
$(m+c, n)$.

Eks: (*) $x^2 - 6x + 2y^2 - 4y + 9 = 0$

Vis at ligningen beskriver en ellipse, finn sentrum, halvakser, og brennpunkter.

(*) $(x-3)^2 - \cancel{9} + 2(y-1)^2 - 2 + \cancel{9} = 0$,

$$(x-3)^2 + 2(y-1)^2 = 2$$

$$\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{1}\right)^2 = 1.$$

Sentrum: $(3,1)$

Halvakser: $\sqrt{2}$ og 1.

Brennpunkter:
$c = \sqrt{2-1} = 1$.
$(2,1)$ og $(4,1)$.

Vi kan parametrisere ellipser:

Husk sirkel: $(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0,2\pi]$.

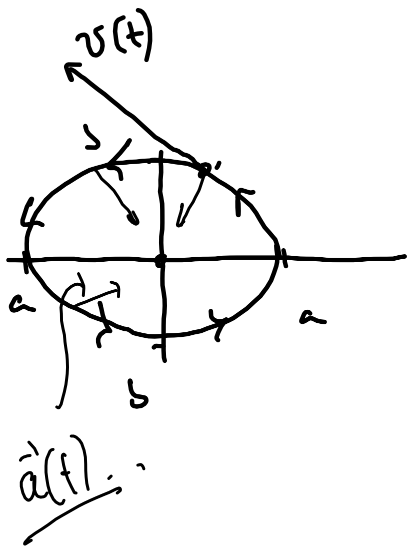
Ellipse: $(a\cdot\cos\theta, b\sin\theta)$, $\theta \in [0,2\pi]$.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \qquad \left(\frac{\cancel{a}\cos\theta}{\cancel{a}}\right)^2+\left(\frac{\cancel{b}\sin\theta}{\cancel{b}}\right)^2=1.$$

<u>Eksempel:</u> Banen til et objekt som beveger seg er parametrisert ved kurven

$$\vec{r}(t)=\left(a\cdot\cos(\alpha\cdot t), b\sin(\alpha\cdot t)\right),$$

$t \in [0,2\pi]$.



Finn akselerasjonen.

$$\vec{r}\,'(t)=\left(-a\sin(\alpha t)\cdot\alpha, b\cos(\alpha t)\cdot\alpha\right)$$
$$\parallel$$
$$\vec{v}(t)$$

$$\vec{a}(t)=\vec{v}\,'(t)=\left(-a\cos(\alpha t)\alpha^2, -b\sin(\alpha t)\cdot\alpha^2\right)$$

$$=-\alpha^2\cdot\vec{r}(t).$$

Hyperbler:

La F_1 og F_2 være to forskjellige punkter i planet.
En hyperbel med brennpunkter F_1 og F_2 er mengden av alle punkter P i planet s.a.

$$\left|\, |PF_1| - |PF_2| \,\right| = 2a .$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 .$$

feb 17-11:53