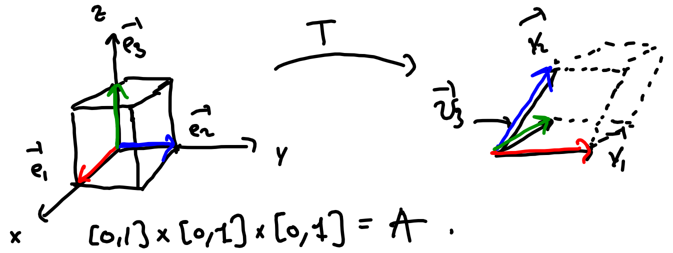
SKIFTE AV VARIABLE I TRIPPELINTEGRALET. 6.10

EKS1: La B være parallellepipedet utspent av vektorene $\underset{\vec{v}_1}{(1,1,0)}$, $\underset{\vec{v}_2}{(1,0,1)}$, og $\underset{\vec{v}_3}{(0,1,1)}$ i $\mathbb{R}^3$.

La $f(x,y,z) = x - y + z$

Regn ut $\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.



$[0,1]\times[0,1]\times[0,1] = A$.

Må finne en lineæravbilding T som avbilder $\vec{e}_1$ på $\vec{v}_1$, $\vec{e}_2$ på $\vec{v}_2$, og $\vec{e}_3$ på $\vec{v}_3$

På matriseform $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

På komponent form: $T(u,v,w) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$= (u+v, u+w, v+w)$.

$$\iiint_B (x - y + z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A [(u+v) - (u+w) + (v+w)] \cdot |\det T'(u,v,w)|\,du\,dv\,dw.$$

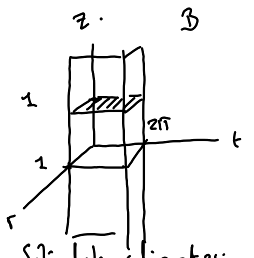
$$\left(\det(T'(u,v,w)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 1\cdot(1) = -2.\right)$$

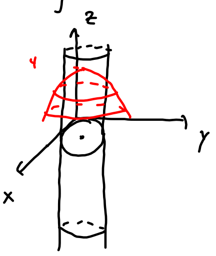
$$= 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 2v\,du\,dv\,dw = \underline{\underline{2}}.$$

EKS 2: La B være området avgrenset av (x,y)-planet, sylinderen $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, og grafen $z=4-(x-1)^2-(y-1)^2$.

$f(x,y,z)=[(x-1)^2-(y-1)^2]\cdot z^2$.

Finn $\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.





Sylinderkoordinater:

$$\tilde{T}(r,t,z)=(1+r\cdot\cos t,\ 1+r\cdot\sin t,\ z).$$

$$T(r,t,z)=(1+r\cdot\cos t,\ 1+r\sin t,\ z\cdot(4-r^2))$$

Så T e en avb. fra $[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]=A$ på B.

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_A f(T(r,t,z))\cdot|\det T'(r,t,z)|\,dr\,dt\,dz$$

Jacobideterminant: $T'(r,t,z)=\begin{bmatrix}\cos t & -r\sin t & 0\\ \sin t & r\cdot\cos t & 0\\ -2rz & 0 & 4-r^2\end{bmatrix}$

$$\det T'(r,t,z)=\underline{(4-r^2)\cdot r}$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1[r^2\cos^2 t-r^2\sin^2 t]\cdot z^2(4-r^2)^2\cdot(4-r^2)\cdot r\,dr\,dt.$$

Husk at integrasjonsrekkefølgen e likegyldig

$$=\int_0^1\int_0^1\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 t-\sin^2 t\,dt\right)}_{=0}\cdot z^2(4-r^2)^3\cdot r^3\,dr\,dz.$$

$$\underline{\underline{=0}}.$$

$$I=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt.$$

$u=\sin t \quad v'=\sin t$

$u'=\cos t \quad v=-\cos t$

$$I=[\sin t\cdot\cos t]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt.$$

DETERMINANTER:

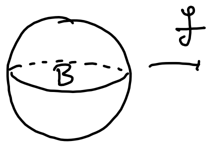
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(0\cdot 1 - 1\cdot 1) - 1\cdot(0\cdot 1 - 1\cdot 1).$$
$$= -2$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot(1\cdot 1 - 0\cdot 0)$$
$$-1\cdot(1\cdot 1 - 1\cdot 0)$$
$$+1\,(1\cdot 0 - 1\cdot 1).$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad = -2,$$

EKS 3: La B være kula i $\mathbb{R}^3$ med radius 1. La $f(x,y,z) = z^2$

Regn ut $\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.



Kulekoordinater: $T(\rho,\phi,\theta) = (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$

Da avbilder T boksen

$A = [0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$.

på kula B.

$$\iiint_B z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho^2\cos^2\phi \cdot \underbrace{|\det T'(\rho,\phi,\theta)|}_{\rho^2\sin\phi}\,d\theta\,d\phi\,d\rho$$

$$= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho^4\cdot\cos^2\phi\cdot\sin\phi\,d\theta\,d\phi\,d\rho$$

$$= 2\pi\int_0^1\int_0^\pi \rho^4\cos^2\phi\cdot\sin\phi\,d\phi\,d\rho$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_0^\pi \cos^2\phi\cdot\sin\phi\,d\phi$$

(substitusjon) $$= \frac{2\pi}{5}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2\pi}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{15}.$$

mar 17-11:17

4.1 Gauss-eliminasjon

Temaet er å løse lineære ligningssystemer.

Eks: $2x + y = 3$
$x + y = 1$

$x + y + z = 1$
$2x + y - z = 5$
$7x + 8y = 3.$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$
$\vdots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$

Mål: Redusere ligningssystemer til systemer det er lett å løse.

Eks:
$$2x + y + z = 0 \quad (i)$$
$$y + 2z = 1 \quad (ii)$$
$$3z = 1/3 \quad (iii)$$

(iii) $z = 1/9$ (ii) $y + 2/9 = 1$
$y = 1 - 2/9 = 7/9.$

(i) $2x + 7/9 + 1/3 = 0$ ...

Hva kan vi gjøre med et ligningssystem for å lage et ekvivalent ligningssystem?

1. Bytte om rekkefølgen til ligningene.

2. Du kan multiplisere en ligning med et tall forskjellig fra null.

$2x + y = 3$ (i)
$x + y = 1$ (ii)

$$\begin{bmatrix} 2x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{bmatrix}$$

3. Kan ta et multiplum av en ligning og legge til en annen ligning.

$2x + y = 3$

$x + y + 5(2x + y) = 1 + 15 = 16.$

mar 17-11:36

Eks:

$$2x + y = 3$$
$$x + y = 1 .$$

$$x + y = 1$$
$$2x + y = 3 \quad \leftarrow \quad \underbrace{\div\, 2 \cdot \text{ligning } 1}_{\text{ligning 2 blir}}$$

$$x + y = 1$$

$$(2x+y) - 2(x+y) = 3 - 2\cdot 1,$$

$$0\cdot x - y = 3 - 2 = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}}$$