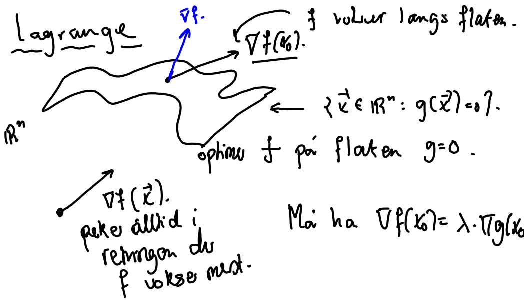
Lagrange

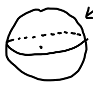


Må ha $\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \cdot \nabla g(\vec{x}_0)$.

Eks: $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$f(x,y,z) = xy+z^2$

Optimer f på flaten $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 1\}$.



$\leftarrow$ S er kuleskallet.

Må altså løse $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ på S.

$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) = 2 \cdot (x,y,z)$.

$\nabla f(x,y,z) = (y, x, 2z)$

Må løse $(y, x, 2z) = \lambda \cdot (x,y,z)$.

- $y = \lambda x$
- $x = \lambda y$
- $2z = \lambda \cdot z$.
- $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Tilf. 1 Dersom $z \neq 0$ må $\lambda = 2$.

Får $y = 2x$, $x = 2y \longrightarrow y = 4y \Rightarrow y = 0$.

Også $x = 0$.

Siden også $x^2+y^2+z^2 = 1 = z^2$, så får vi at $z = \pm 1$.

I begge tilfeller har vi at $f(x,y,z) = f(0,0,\pm 1) = 1$.

Tilf 2: $z = 0$.

(i) $y = \lambda x$

(ii) $x = \lambda y$

$(i)+(ii) = x+y = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$

Tilf (a): $x+y \neq 0$. Da er $\lambda = 1$, altså $x = y$.

Har også $x^2+y^2 = 1$.

Så vi har to muligheter $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

I begge tilfeller $f(x,y,z) = x \cdot y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

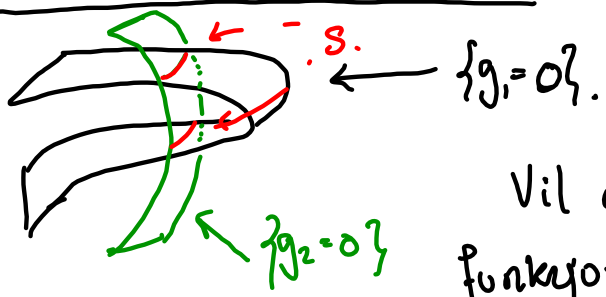
Tilf (b): $x+y = 0 \Leftrightarrow x = -y$, så mulighetene er $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

I begge tilfeller er $f(x,y,z) = x \cdot y = -\frac{1}{2}$.

Så $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ er globale min-punkter, og

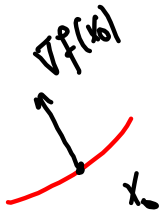
$(0,0,1)$ og $(0,0,-1)$ er glob. maks-pkt.

Lagrange med flere bibet.



Vil optimere en funksjon f på

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : g_1(\vec{x}) = g_2(\vec{x}) = 0\}.$$



Av samme grunn som før må vi ha at ∇f ligger i normalplanet til kurven.

Litt ettertanke gir at normalplanet er utspent av $\nabla g_1(\vec{x_0})$ og $\nabla g_2(\vec{x_0})$. Så det vil si at

$$\boxed{\nabla f(\vec{x_0}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_0}) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{x_0})}.$$

Teorem: Anta at $\vec{x_0}$ er et ekstrempunkt for $f(\vec{x})$ på mengden

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g_1(\vec{x_0}) = \cdots = g_k(\vec{x_0}) = 0\}.$$

Da er enten

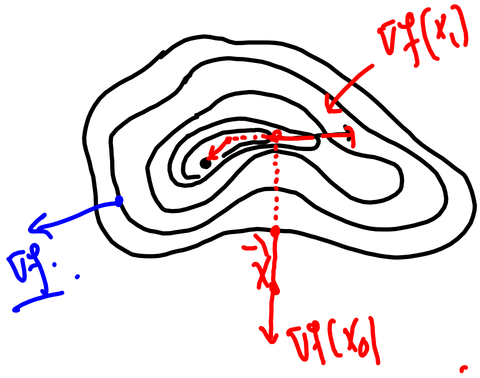
$$\{\nabla g_1(\vec{x_0}), \ldots, \nabla g_k(\vec{x_0})\}$$

er lin. avh. eller

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_0}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\vec{x_0}).$$

Gradientmetoden. (lokalt)

Anta at du vil finne et minimum for en funksjon f, og anta at du kan gjøre et "godt" gjett av minimumspunkt $\vec{x}_0$.



Siden f vokser i retning $\nabla f(x_0)$, bør du bevege deg i retning $-\nabla f(\vec{x}_0)$, og stopp i et punkt $\vec{x}_1$ du funksjonen begynne å vokse igjen.

$$g(t) := f(x_0 \div t\cdot\nabla f(x_0))$$

Ønsker å finne den minste t'en som er et min. for $g(t)$.

løser $g'(t)=0$,

$$\text{løse } g'(t) = \nabla f(x_0 \div t\cdot\nabla f(x_0))\cdot(-\nabla f(x_0)) = 0.$$

Kall denne verdien t_0.

sett $\vec{x}_1 = x_0 \div t_0\cdot\nabla f(x_0)$.

⋮

fortsett slik.

12.1. Rekker

Husk at en følge er en mengde $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $c_n \in \mathbb{R}$.

En rekke er en vendelig sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad .$$

Definer den m'te delsummen

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n .$$

DEF: Vi sier at rekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer dersom følgen $\{s_m\}$ konvergerer, og ellers sier vi at rekka divergerer eller er divergent.

Eks1: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Eks2: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

12.1.4 Divergenstest: Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent følge så må

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bevis: Rekka konvergerer hvis følgen $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ konvergerer.

Men da må $s_m - s_{m-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

og $s_m - s_{m-1} = \sum_{n=0}^{m} a_n - \sum_{n=0}^{m-1} a_n = a_m$,

så $a_m \to 0$ når $m \to \infty$. $\blacksquare$

mai 19-11:31

12.1.1 SETNING: La $a_0 \neq 0$. Rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n \quad \left(= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n\right)$$

konvergerer dersom $|r| < 1$,
og i så fall er summen lik

$$\frac{a_0}{1-r},$$

og rekka divergerer dersom $|r| \geq 1$.

Bevis: Divergens: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$.

Se at $a_0 r^n$ umulig kan gå mot null dersom $|r| \geq 1$, så dette følger av div.testen.

Konvergens:

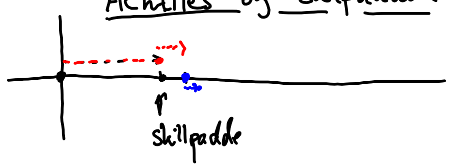
Husk at: $S_m = \sum_{n=0}^{m} a_0 r^n$

$$= \frac{1 - r^{m+1}}{1-r} \cdot a_0 .$$

$\lim_{m \to \infty} r^{m+1} = 0$ dersom $|r| < 1$,

så $\lim_{m \to \infty} S_m = \dfrac{a_0}{1-r}$. $\blacksquare$

Eks: Achilles og skilpadden.



$$1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

Ved steg m har skilpadden løpt $\underbrace{1 + \frac{1}{10} + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^m}_{\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{10}\right)^n}$ meter.

$$\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{10}\right)^n \xrightarrow{m \to \infty} \frac{1}{1 - 1/10}.$$

Regneregler for rekker.

Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ e konvergente rekker, da er

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

$c \in \mathbb{R}$