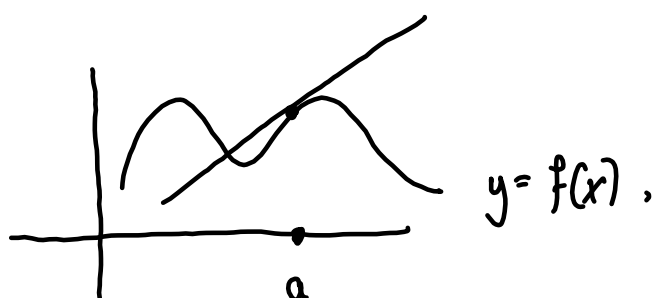


$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ AFFINLÆR.

$$F(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c},$$

A er en $(m \times n)$ -matrise, og $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$.

Linearisering (af differentiable afbildninger).



f er differentbar i $a \in \mathbb{R}$ dersom

funktionen $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

er en veldig god tilnærming

til f i nærheden af punktet a .

Hva betyder "vel"dig"?

formelt: f er differentbar i $a \in \mathbb{R}$ dersom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ eksisterer,}$$

og i så fald betegner vi grænsen med $f'(a)$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0.$$

Så hvis vi definerer

$$\tau(x-a) := \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a}$$

så er τ en kontinuertlig funktion

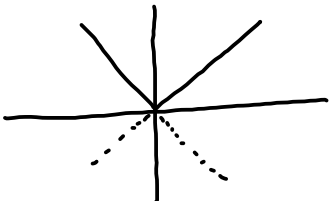
med egenskaper at $\lim_{x \rightarrow a} \tau(x-a) = 0$.

Vi får: $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \tau(x-a) \cdot (x-a)$

$$\Leftrightarrow f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}_{\text{lineariseringen}} + \underbrace{\tau(x-a) \cdot (x-a)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow a, \\ 0}}$$

til f i punktet a .

Eks: $f(x) = |x| \rightsquigarrow$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0. \end{cases}$$


Hvordan gjør vi det i flere variable?

En avbildning $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
er deribare i et punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$
dersom det fins en affin lineær
avbildning som er en veldig god
tilnærming til F nær \vec{a} .

Formelt: F er deribare i \vec{a} dersom
det fins en $(m \times n)$ -matrise A
og en kontinuerlig avbildning $\tau(\vec{x} - \vec{a})$
s.a.

$$F(\vec{x}) = F(\vec{a}) + A \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \tau(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \|\vec{x} - \vec{a}\|$$

$$\text{og } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \tau(\vec{x} - \vec{a}) = 0.$$

• Vi kaller A den deriverte i
punktet \vec{a} , og vi skriver $F'(\vec{a}) = A$.

• Vi kaller $F(\vec{a}) + A(\vec{x} - \vec{a})$
for lineariseringen til F i \vec{a} ,
og vi betegner denne med
 $T_{\vec{a}}F(\vec{x})$.

La $n \vec{a}$ $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en afbildning.

$A \subset \mathbb{R}^n$ og antag at F er differentierbar
i et punkt $\vec{a} \in A$,

Skriv: $F(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

Da er

$$F'(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

Jacobi-
matrisen til
 F i \vec{a} .

$$F(\vec{x}) = F(\vec{a}) + F'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \tau(\vec{x} - \vec{a}) \|\vec{x} - \vec{a}\|.$$

Eks : La $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være avb,
definiert ved

$$F(x,y) = \left(\underset{f_1}{x^2y + y^3}, \underset{f_2}{xy^2 + 5} \right).$$

Finn lineariseringen til F
i punktet $(1,1)$.

(i) Finn konstantleddet $F(1,1) = (2, 6)$.

(ii) Må finne $F'(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

Så Jacobimatrisa
til F i $(1,1)$ blir

$$F'(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Lineariseringen blir : $\vec{x} - \vec{a}$

$$T_{(1,1)}F(\vec{x}) = F(1,1) + F'(1,1) \cdot [(x,y) - (1,1)]$$

$$= (2,6) + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (x-1) \\ (y-1) \end{pmatrix}$$

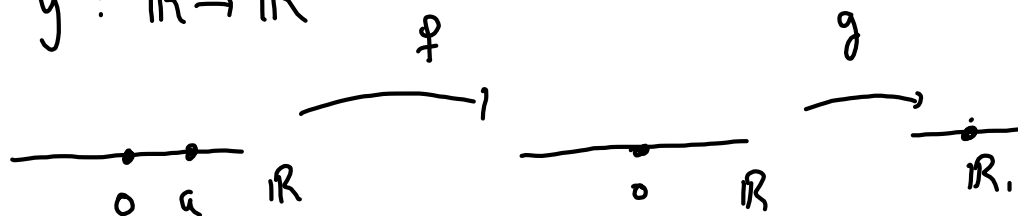
$$= (2,6) + (2 \cdot (x-1) + 4(y-1), (x-1) + 2(y-1))$$

$$= \dots$$

Kjernerregelen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



Se på komposisjoner $h(x) = g(f(x))$

$$\text{Notasjon: } h = g \circ f.$$

For $a \in \mathbb{R}$, hva er $h'(a)$?

$$h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Teorem 2.7.1: Anta at vi har to mengder

$A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, og avbildinger

$G: A \rightarrow B$ og $F: B \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Derom G er deriverbar i

$\vec{a} \in A$ og F er deriverbar i

$G(\vec{a}) = \vec{b} \in B$, så er $H = F \circ G$

er deriverbar i \vec{a} , og

$$H'(\vec{a}) = F'(G(\vec{a})) \cdot G'(\vec{a}).$$

Dersom $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ og $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$
 er avbildinger, la vi $F \circ G$ betegne
 avbildingen $\vec{x} \mapsto F(G(x))$

La F, G, A og B være som i teoremet over.

Sett $H = F \circ G$.

$$G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad G(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$$

$$F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad F(\vec{y}) = (f_1(\vec{y}), \dots, f_k(\vec{y})).$$

La $\vec{a} \in A$.

Teorem: Dersom G er deriverbar i \vec{a}
 og F er deriverbar i
 $\vec{b} = G(\vec{a})$, da er H deriver-
 bar i \vec{a} , og jacobimatrise
 til H er gitt ved

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\vec{a}) = \sum_{s=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_s}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial g_s}{\partial x_j}(\vec{a}).$$

Hvorfor stemmer det?

$$H'(\vec{a}) = F'(G(\vec{a})) \cdot G'(\vec{a}).$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{b}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\vec{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(\vec{b}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial y_n}(\vec{b}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

