Rekker

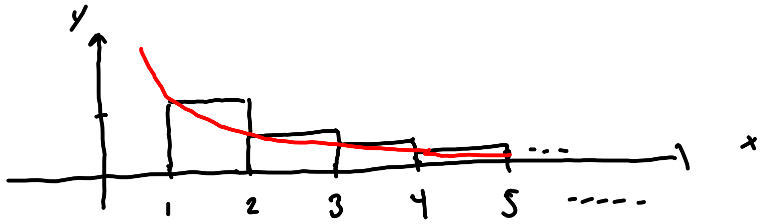
Div. test: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer

$$\Downarrow$$

$$|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Holder den motsatte implikasjonen? Nei!

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergerer ikke.



$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ = summen av arealene av boksene over.

Tegn inn grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$.

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty$, da

må arealet under grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$ for $x \in [1, \infty)$ være endelig.

Men: Arealet under grafen er

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\ln x\right]_1^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln n - \cancel{\ln 1} = \infty .$$

12.1.8 Dersom en av rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergerer og den andre divergerer, da divergerer

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n - b_n.$$

12.1.9 **SETNING** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ vil enten begge konvergere eller divergere.

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Positive rekker

<u>DEF</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er <u>positiv</u> dersom

$a_n \geq 0$ for alle n.

<u>12.2.1</u> SETNING: En positiv rekke konvergerer hviss den er begrenset.

Bevis: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

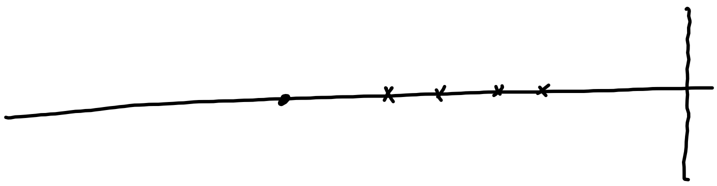
$$s_m \underset{\text{DEF}}{=} \sum_{n=0}^{m} a_n$$

Rekka konv. $\Longleftrightarrow$ $\{s_m\}$ konvergerer.

Vi har at $s_{m+1} \geq s_m$ for alle m.

Ikke begrenset $\Longrightarrow$ summen er uendelig, og dermed divergens.

Og fra kalkulus vet vi at en voksende begrenset følge konvergerer.



Obs: holder ikke for generelle rekker.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0,$$

$$s_2 = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 = 1$$

$$\vdots$$

$$s_m = \begin{cases} 0 & \text{når } m = 2k+1 \\ 1 & \text{når } m = 2k \end{cases}.$$

12.2.3 INTEGRALTESTEN:

La nå $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ være en positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon. Da har vi

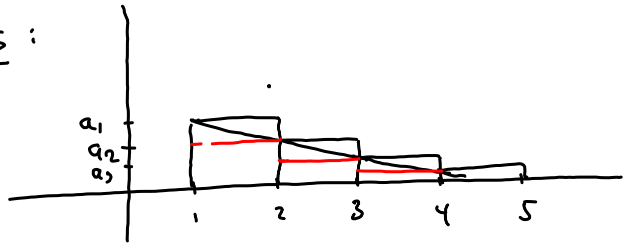
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergerer} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty .$$

(I eksempelet i sted brukte vi $f(x) = \frac{1}{x}$).

Bevis:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a_n



(i) $$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

(ii) $$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx .$$

12.2.4 SETNING:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p \text{ konvergerer}$$

hviss $p > 1$.

Bevis: Anta at $p > 1$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{x}\right)^{p-1} \right]_1^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{n}\right)^{p-1}}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} - \frac{1}{1-p}$$

$$= \frac{1}{p-1} .$$

Anta at $p \le 1$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^p \ge \frac{1}{x} .$$

Har allerede sett at $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \infty$.

12.2.6 SAMMENLIGNINSTESTEN.

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være

positive rekke

(i) Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvegere

og det fins $c \in \mathbb{R}$ s.a.

$b_n \leq c \cdot a_n$ for alle n,

så konvegere $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divegeer

og det fins $c > 0$ s.a. $b_n \geq c\, a_n$

for alle n, så divegeo

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Bevis: (i) $\sum_{n=1}^{m} b_n \leq \sum_{n=1}^{m} c \cdot a_n$

$= c \sum_{n=1}^{m} a_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvegen $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{m} a_n \leq M < \infty$ for alle m,

så $\sum_{n=1}^{m} b_n \leq c \cdot M$ for alle m,

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m} b_n$ er konvegent.

Eks: Avgjør om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3+7n^2+1}{2n^4+5n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

divergerer eller konvergerer.

Skriver summen som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left(3+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(2+\frac{5}{n^3}\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot c_n, \quad \text{der } c_n = \frac{3+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}}{2+5/n^3}.$$

$2+5/n^3 \le 7$

$$c_n \geq \frac{3}{7}$$

Har vist at $b_n \geq \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{n}$ for alle $n\in\mathbb{N}$, og siden $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ er divergent så følger det at $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er divergent.

$\frac{a}{b}$

12.2.8 Grensesammenligningstesten.

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være positive rekker.

(i) Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$, konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og dersom $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$, så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også.

Eks: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+7}{n^5+n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$

Avgjør om rekka konvergere eller divergeres.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)}{n^5\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}.$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{1+1/n^4}\right).$$

Ser at vi bør bruke $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Som vi vet at konvergere.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1/n^2}\cdot\frac{1+2/n^2+7/n^3}{1+1/n^4}}{\cancel{1/n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n^2+7/n^3}{1+1/n^4} = 1 < \infty,$$

så $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent.

mai 23-11:39

<u>12.2.12</u> Forholdstesten:

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke og anta at

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ eksisterer.}$$

(i) Dersom $a < 1$ e rekka konvergent,

(ii) dersom $a > 1$ så e rekka divergent,

(iii) dersom $a = 1$ kan vi ikke konkludere.

<u>Eks:</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$. Avgjør om rekka divergerer eller konvergerer.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ "

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}}{\frac{n^5}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{n^5} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(n+1)^5}{n^5}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

$a_n = \frac{n^5}{3^n}$

så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e konvergent. ■

12.2.16 ROTTESTEN

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke, og anta at

$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ eksisterer.

(i) Dersom $a < 1$ så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

(ii) Dersom $a > 1$ så divergerer rekka,

(iii) Dersom $a = 1$ så kan vi ikke konkludere.