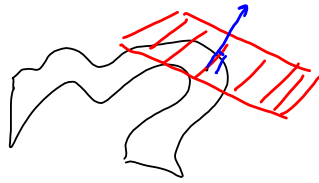


Nivåflater - normaler og tangenter



DEF: Anta at $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ er en funksjon av n variabler, og velg $c \in \mathbb{R}$. Mengden

$$N_c := \{ \vec{x} \in A : f(\vec{x}) = c \}$$

kalles en nivåflate for f .

Eks: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.



Normal: Fiks et punkt i N_c , kall det \vec{a} .



La $\vec{r}: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N_c$ være en kurve med $\vec{r}(0) = \vec{a}$.

$$\vec{r}'(0).$$

$$0 = (c)' = \left(f(\vec{r}(t)) \right)' \Big|_0 = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}'(0).$$

SETNING 3.7.2: La $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ være

deriverbar og la $\vec{a} \in N_c$.

Da står $\nabla f(\vec{a})$ vinkelrett på

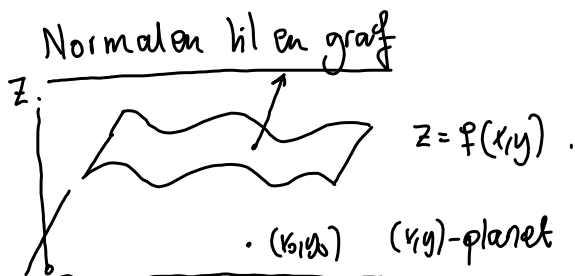
N_c i \vec{a} , i du forstand at

du som $\vec{r}: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N_c$ er

en deriverbar kurve med $\vec{r}(0) = \vec{a}$,

da er $\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}'(0) = 0$.

DEF: Tangentplanet til N_c i \vec{a}
 er mengden av alle vektorer
 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \nabla f(\vec{a}) = 0$.



Vi tenkes på grafen som en nivåflate:

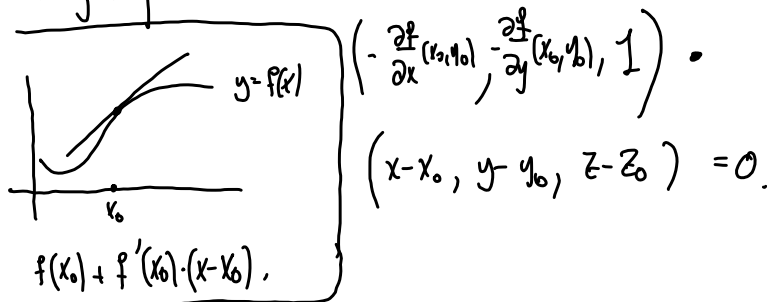
$$\text{Definér } g(x, y, z) = z - f(x, y),$$

$$\text{s.a. grafen} = N_0$$

Normalen blir $\nabla g(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) =$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right).$$

Tangentplanet: La $(x_0, y_0, z_0) \in N_0$.



$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z - z_0 = 0$$

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

$$f(x_0, y_0)$$

↑
 Linearisering til f i (x_0, y_0) .

EKS: $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$.

Find normalen og tangentplanet
til grafen til f i $(3/2, 3/2)$,

• $f(3/2, 3/2) = \frac{1}{2}$.

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(3/2, 3/2) = 1$.

• $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y-1)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(3/2, 3/2) = 1$.

Normalen: $(-1, -1, 1)$.

Tangent: $z = f(3/2, 3/2) + \frac{\partial f}{\partial x}(3/2, 3/2) \cdot (x - 3/2)$
 $+ \frac{\partial f}{\partial y}(3/2, 3/2) \cdot (y - 3/2)$
 $= \frac{1}{2} + (x - 3/2) + (y - 3/2)$
 $= -\frac{5}{2} + x + y$.

```
>> x=0:0.05:2;
```

```
>> y=x;
```

```
>> [x,y]=meshgrid(x,y);
```

Undefined function 'meshgrid' for input arguments of type 'double'.

Did you mean:

```
>> [x,y]=meshgrid(x,y);
```

```
>> mesh(x,y,(x-1).^2+(y-1).^2)
```

```
>> hold on
```

```
>> mesh(x,y,-5/2+x+y)
```

```
>> quiver3(3/2,3/2,1/2,-1,-1,1)
```

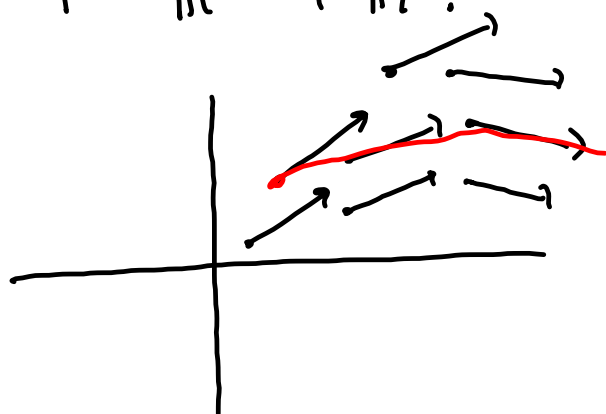
```
>> axis equal
```

```
>>
```

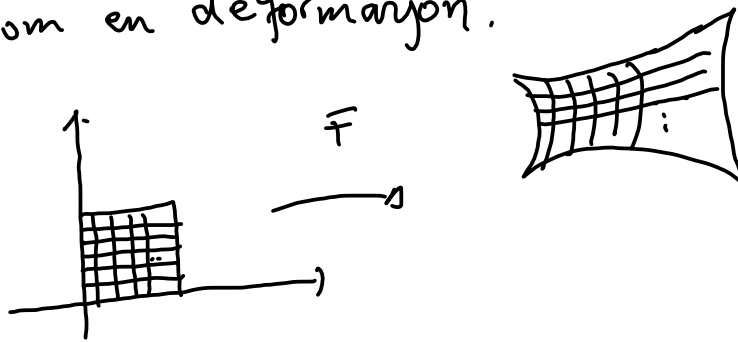
Grafisk fremstilling av vektorfeltet

Et vektorfelt på \mathbb{R}^2 er en avbildning

$$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



Skal nå tenke på $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
som en deformasjon.



Eks: $F(r, t) = (e^r \cdot \cos(t), e^r \cdot \sin(t))$.
($z \mapsto e^z$)

```
>> r=linspace(0,1,30);
>> t=r;
>> f=inline('exp(r).*cos(t)')
```

f =

Inline function:

f(r,t) = exp(r).*cos(t)

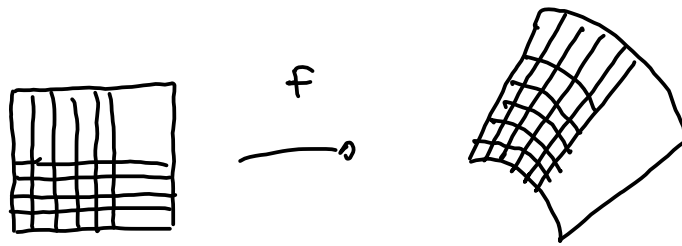
```
>> g=inline('exp(r).*sin(t)')
```

g =

Inline function:

g(r,t) = exp(r).*sin(t)

```
>> for n=1:30
plot(f(r,t(n)),g(r,t(n)))
end
>> hold on
>> for n=1:30
plot(f(r,t(n)),g(r,t(n)))
end
>> for n=1:30
plot(f(r(n),t),g(r(n),t))
end
>>
```



Merk : Jo mindre rutene er, jo mer kommer bildene av dem til å se ut som rektangler.

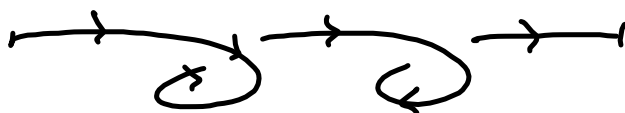
$$F(\vec{x}) = F(\vec{a}) + T_{\vec{a}}F(\vec{x}-\vec{a}) + o(\vec{x}-\vec{a}).$$

Når \vec{a} er det $T_{\vec{a}}F$ som "bestemmer".

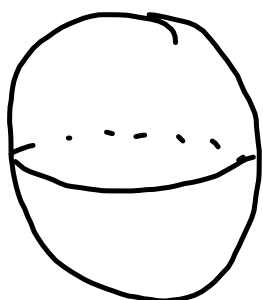
- Husk at dersom $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er en lineæravbildning gitt ved $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, da skaleres T arealer med faktor $|\det A|$.
- Når punktet \vec{a} skaleres arealer nesten med en faktor lik determinanten til $T_{\vec{a}}F$.

$$T_{\vec{a}}F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{a}) \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Parametriserte flater



$$\vec{r}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$



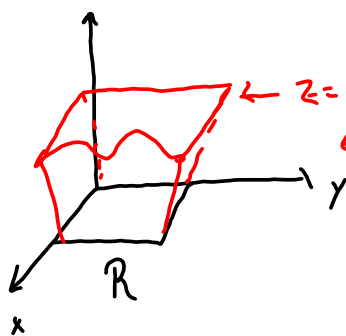
$$\left(\sin \phi \cdot \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi \right)$$

DEF: En parametrisert flate er en kontinuerlig avbildning

$$F: A \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ der } A$$

er et område i \mathbb{R}^2 .

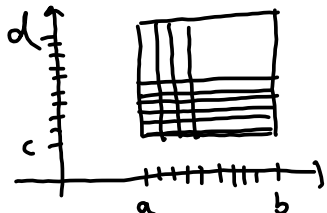
6.1 Dobbeltintegraler



Integral kunde være volumet av "boksen".



La $R = [a, b] \times [c, d]$ være et rektangel.



Velg en partisjon av $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

og av $[c, d]$:

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

Partisjon Π av R . \rightarrow Sett $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

Anta nå at $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ er en funksjon.

$$m_{ij} := \inf \{ f(x, y) : (x, y) \in R_{ij} \}$$

$$M_{ij} := \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in R_{ij} \}.$$

Nedre Rappesum:
$$N(\Pi) = \sum_{ij} m_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$$

$$\phi(\Pi) = \sum_{ij} M_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$$