DETERMINANTER

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det(A) := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Anta det e def. for $(n-1)\times(n-1)$-matrise.

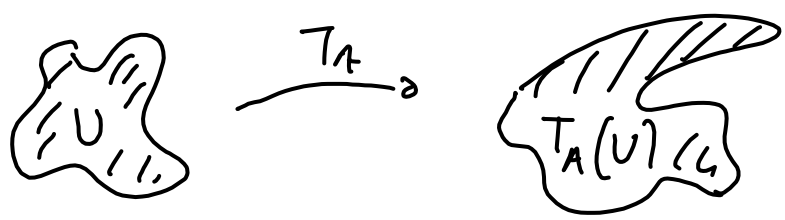
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{12} \cdot \det(A_{12}) + a_{13} \cdot \det(A_{13}) - \cdots \pm a_{1n} \cdot \det(A_{1n})$$

Tolkning: La A være en $(n\times n)$-matrise. La $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være lineæravbildingen definert ved $T_A(\vec{x}) := A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dersom U e en begrenset mengde i $\mathbb{R}^n$, da e n-volumet til $T_A(U)$ e $|\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}_n(U)$.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^n$$



Lemma 4.9.1 La A være en $(n \times n)$-matrise, og anta at enten en rad eller en søyle består bare av nuller. Da er $\det(A) = 0$.

Bevis: Induksjon på n.

Begynner med $n = 2$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ? & ? \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & ? \\ 0 & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ? & 0 \\ ? & 0 \end{bmatrix}.$$

Anta nå at resultatet holder for $(n-1) \times (n-1)$-matriser, $(n-1) \geq 2$.

Anta at en rad i en $(n \times n)$-matrise består bare av nuller.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{12} \cdot \det(A_{12}) + \cdots \pm a_{1n} \cdot \det(A_{1n}).$$

$$= a_{11} \cdot 0 - a_{12} \cdot 0 \cdots \pm a_{1n} \cdot 0,$$

fordi hver A_{1j} har en rad som består bare av nuller.

apr 25-10:28

Teorem 4.99: La A være en $(n\times n)$-matrise.

(i) Dersom A er øvre eller nedre triangulær så er $\det(A)$ lik produktet av diagonalelementene.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ ? & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} = A$$

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$$

(ii) Dersom du bytter om to rader i A forandrer determinanten fortegn.

(iii) Dersom du multipliserer en rad i A med et tall s skaleres determinanten med s.

$$A = \begin{bmatrix} s\cdot a_{11} & s\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = s\, a_{11}\cdot a_{22} - s\, a_{12}\cdot a_{21}$$
$$= s(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}).$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

$$\det(\tilde{A}) = a_{21}\cdot a_{12} - a_{22}\cdot a_{11}$$
$$= -\det(A)$$

(iv) Dersom du legger et multiplum av en rad til en annen så forandrer ikke determinanten seg.

Observer: Hvis A er en $(n\times n)$-matrise og B er matrisen du får ved å utføre en elementær radoperasjon på A, da har

$$\det(A) = 0 \iff \det(B) = 0.$$

Så: $\det(A) = 0 \iff \det(\mathrm{rref} A) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & & ? \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathrm{rref} A) = 0 \iff$ det er ikke pivotelementer i hver søyle

$\iff A$ er ikke inverterbar.

Teorem: La A være en $(n\times n)$-matrise. A er inverterbar hviss $\det(A) \neq 0$

apr 25-10:38

Bevis for (i): Vise for øvre triangulære matrise.

Induksjon på n.

Begynner med $n=2$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0$$
$$= a_{11} \cdot a_{22}.$$

Anta nå at resultatet holder for $(n-1) \times (n-1)$-matriser.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \; 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\hphantom{a_{22} \cdots a_{nn}}}_{A_{11}}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) \pm a_{12} \cdot \det(A_{12}) + \cdots \pm a_{nn} \cdot \det(A_{1n}).$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}) - a_{12} \cdot 0$$

Induksjonsantagelse

Lemma 4.9.1 siden 1ste søyle i A_{12} består bare av nuller

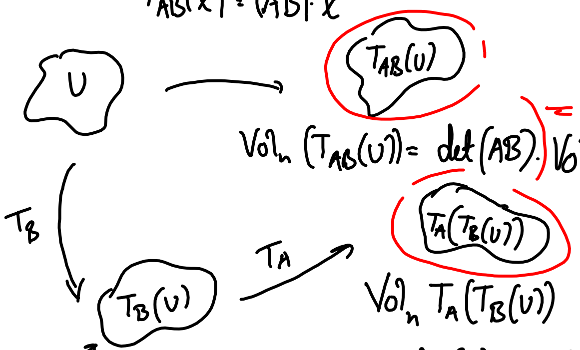
$$+ a_{13} \cdot 0 \cdots \pm a_{1n} \cdot 0.$$

SETNING 4.3.14 La A og B være $(n\times n)$-matriser.
Da er $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$.

"**Bevis**": Anta for enkelhets skyld at $\det(A)\geq 0$ og $\det(B)\geq 0$.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T_{AB}} \mathbb{R}^n$$

$$T_{AB}(\vec{x})=(AB)\cdot\vec{x}$$

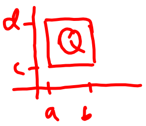


$\mathrm{Vol}_n(T_{AB}(U)) = \det(AB)\cdot \mathrm{Vol}_n U.$

$\mathrm{Vol}_n(T_B(U)) = \det(B)\cdot \mathrm{Vol}_n U.$

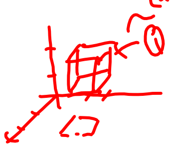
$\mathrm{Vol}_n\, T_A(T_B(U))$
$= \det(A)\cdot \mathrm{Vol}_n(T_B(U))$
$= \det(A)\cdot\det(B)\cdot \mathrm{Vol}_n(U).$

$[a,b]\times[c,d]$



$(b-a)\cdot(d-c) = \mathrm{Vol}_2(Q)$

$[a,b]\times[c,d]\times[e,f] = \mathrm{Vol}_3(\tilde{Q})$



$(b-a)\cdot(d-c)\cdot(f-e)$,

i $\mathbb{R}^n$: $\hat{Q}=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]$

$\mathrm{Vol}_n\hat{Q} := (b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n).$

Observer: $\det(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_m)$

$= \det(A_1\cdot \underbrace{(A_2\cdot\ldots\cdot A_m)}_{(n\times n)\text{-matrise}})$

$= \det(A_1)\cdot \underbrace{\det(A_2\cdot\ldots\cdot A_m)}_{\det(A_2)\cdot\det(A_3\cdot\ldots\cdot A_m)}$

$= \ldots = \det(A_1)\cdot\det(A_2)\cdot\ldots\cdot\det(A_m).$

Korollar 4.3.15 La A være en invertibel matrise. Da er
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Bevis: $1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1})$

$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ $\overset{\text{setningen}}{=} \frac{\det(A) \cdot \det(A^{-1})}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}$.

Husk: La A være en $(n \times n)$-matrise. Da er A^T matrisen du får ved å bytte ut rader med søyler.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ a_{13} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Så at du får A^T ved å speile A om diagonalen.

Korollar 4.3.16 La A være en $(n \times n)$-matrise. Da er $\det(A^T) = \det(A)$.

Bevis: Husk at vi kan skrive

$$A = \underbrace{E_1 \cdot E_2 \cdots E_m}_{\text{elementære matrise}} \cdot \underset{\text{rref}(A)}{B}.$$

Fra setningen over:

$$\det(A) = \det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdots \det(E_m) \cdot \det(B).$$

$$A^T = (E_1 \cdots E_m \cdot B)^T = B^T E_m^T \cdot E_{m-1}^T \cdots E_1^T.$$

$$\det(A^T) = \det(B^T) \cdot \det(E_m^T) \cdots \det(E_1^T).$$

(i) B er øvre triangulær (siden $B = \text{rref}(A)$) så $\det(B)$ = produktet av diagonalelementene.

$\begin{bmatrix} b_{11} & & ? \\ & b_{22} & \\ 0 & & b_{nn} \end{bmatrix} = B$ B^T er nedre triangulær med de samme diagonalelementene, så $\det(B^T) = \det(B)$.

$\begin{bmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ ? & & b_{nn} \end{bmatrix} = B^T$ (ii) $\det(E_j^T) = \det(E_j)$

fordi man får E_j^T ved å utføre en tilsvarende radoperasjon på I_n som for å danne E_j.

Alt i alt ser vi at faktorene over i $\det(A)$ er de samme som faktorene i $\det(A^T)$ ∎

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots & \pm \\ - & + & - & + & \cdots & \pm \\ + & - & + & - & \cdots & \\ \vdots & & & & & \\ \pm & \cdots & & & & \end{bmatrix}$$

Du kan utvikle determinanten langs hvilken rad eller søyle du vil.

$$\det(A) = -a_{21} \cdot \det(A_{21}) + a_{22} \det(A_{22}) - \cdots \pm a_{2n} \cdot \det(A_{2n}).$$

Eks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$