Rottest, Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{(3+\frac{1}{n})^{-n}}$, avgjør om rekka konv. eller div.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(3+\frac{1}{n})^{-n}} = \lim_{n\to\infty} (3+\frac{1}{n})^{-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$

så rekka konvergerer.

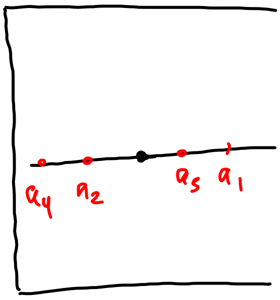
Alternerende rekker (12.3).

En rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

eller

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$$



der $a_n > 0$ kalles alternerende.

12.3.1 Test for alternerende rekker.

Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er alternerende, og anta at verdien $|a_n|$ avtar mot null. Da konvergerer rekka, og hvis $S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ og S er summen til hele rekka, så har vi

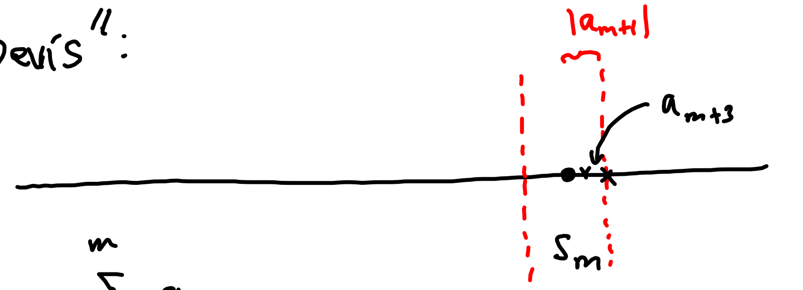
$$|S_m - S| < |a_{m+1}|$$

Obs: Alternerende er viktig!

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent selv om $\frac{1}{n}$ avtar mot null når $n \to \infty$.

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ er konvergent ved testen.

"Bevis":



$$S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

a_{m+1}

$S_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3}$

12.4. Absolutt og betinget konvergens.

DEF: Vi sier at rekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er **absolutt** konvergent dersom $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ er konvergent, men ikke absolutt konvergent siden $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

En konv. rekke som ikke er abs. konv. kalles **betinget** konv.

12.4.2 SETNING Absolutt konvergens $\Longrightarrow$ konvergens.

Så vi kan bruke testene våre på generelle rekker så lenge vi setter på absoluttverditegn.

12.4.5 Forholdstest for generelle rekker.

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke, og anta at grensen

$$a = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

eksisterer.

Da har vi

(i) dersom $a<1$ konvergerer rekka,

(ii) dersom $a>1$ divergerer rekka, og

(iii) dersom $a=1$ kan vi ikke konkludere.

12.4.6 Rottesten for generelle rekker.

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekka, og anta at

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

eksisterer.

(i) dersom $a<1$ konvergerer rekka,

(ii) dersom $a>1$ divergerer rekka,

(iii) dersom $a=1$ kan vi ikke konkludere.

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} n(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Avgjør om rekka konvegere elle divegere.

Forholdstest: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}}{n\cdot(\frac{1}{2})^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

så rekka e konvegent.

Rekker av funksjone (12.5)

La $A \subset \mathbb{R}$, og la $v_n : A \to \mathbb{R}$ være funksjone for $n=1,2,3,\ldots$

Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ sies å være punktvis konvegent dersom følgen av delsumme $s_m^{(x)} = \sum_{n=1}^{m} v_n(x)$ konvegere for hver fikserte x. Vi sier at rekka er **uniformt** konvegent dersom følgen s_m konvegere uniformt mot en funksjon f på A.

Eks: Sett $v_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ på $\mathbb{R}$ (nch)

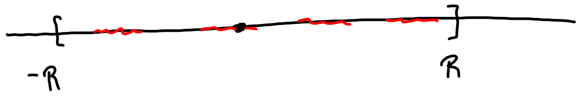
$$v_0(x)+v_1(x)+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (= e^x)$$

12.5.1 : Weierstrass' M-test.

La $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ være en funksjonsrekke på en delmengde $A \subset \mathbb{R}$. Dersom det fins konvergent tallrekke $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ s.a. $|v_n(x)| \leq M_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, konvergerer funksjonsrekka uniformt og absolutt på A.

$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)|$ konvergerer.

Eks: Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerer uniformt på alle begrensete mengder i $\mathbb{R}$.



Holder å vise konvergens på et vilkårlig intervall $[-R,R]$.

Har at $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{R^n}{n!}$ for alle $x \in [-R,R]$.

Sett $M_n = \frac{R^n}{n!}$

Må avgjøre om $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$ konvergerer.

Forholdstest: $\lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}}{R^n \cdot \frac{1}{n!}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{R^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$

$= \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1,$

så tallrekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$ konvergerer, så ved M-testen konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ uniformt på $[-R,R]$.

$\quad\;\shortparallel$

e^x.

Konvergens av potensrekker

En potensrekke er en funksjonsrekke
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n .$$

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (her er a lik null).

$e^{x-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$ (her er a lik 3).

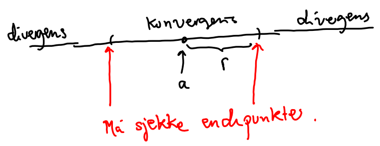
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\left(= \frac{1}{1-x}, \text{ for } |x|<1\right)$.

12.6.1 TEOREM: La $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ være en potensrekke. Da er det tre muligheter:

(i) rekka konvergerer for alle x,

$f(a)=a_0$ (ii) — " — bare for $x=a$.

(iii) det fins en $r>0$ s.a. rekka konvergerer for alle $x \in (a-r, a+r)$, og divergerer for alle $x \in \mathbb{R} \setminus [a-r, a+r]$.



Vi kaller r konvergensradien til rekka.

Eks. fra forrige gang: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergerer for $|x|<1$, divergerer for $|x|>1$, og vi ser at vi ikke har konv. i endepunktene.

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2+n) \cdot x^n$ – Finn konvergensområdet til rekka.

Forholdstest:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1)^2+n+1)\cdot|x|^{n+1}}{(2n^2+n)\cdot|x|^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2n^2+5n+3}{2n^2+n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} |x| = |x| .$$

- Ser at vi ikke har konvergens for $|x|>1$.
- Ser at vi har konvergens for $|x|<1$.
- Må sjekke punktene ± 1 separat.

1: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2n^2+n)\cdot 1^n}_{\text{vokser mot uendelig}}$.

-1: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2n^2+n)(-1)^n}_{\text{abs. verdi vokser mot uendelig}}$.

Så konvergensområdet er $(-1,1)$.

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(x-3)^n$

Finn konv.området.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}|x-3|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot|x-3|.$$

- Se at dersom $|x-3|>2$ så divergere rekka.
- Se at for $|x-3|<2$ så vi har konvergens.
- Sjekker endepunkter.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(x-3)^n.$$

Endepunkte e 1 og 5.

$$5: \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \infty.$$

1: lik.

Konvergensområde: $(1,5)$.