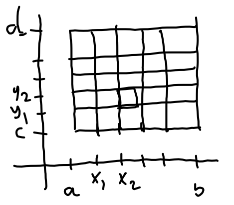
Dobbeltintegraler



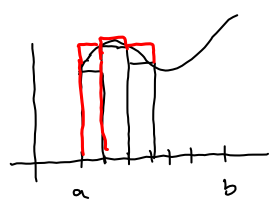
$R = [a,b] \times [c,d]$.

Gitt begrenset funksjon f på R.

Partisjon Π: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$

Analogi i en variabel:



$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

$m_{ij} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\}$.

$M_{ij} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\}$.

Nedre trappesum: $N(\Pi) = \sum_{ij} m_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

Øvre trappesum: $Ø(\Pi) = \sum_{ij} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})\right)$$

Nedreintegralet: $\underline{\iint} f(x,y)\,dx\,dy = \sup\{N(\Pi) : \Pi$ e en partisjon av $R\}$.

Øvreintegralet: $\overline{\iint} f(x,y)\,dx\,dy = \inf\{Ø(\Pi) : \Pi$ e en partisjon av $R\}$.

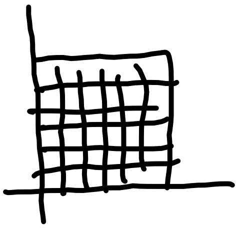
DEF: La f være en begrenset funksjon på et rektangel R. Vi sier at f e integrerbar over R dersom $\underline{\iint} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\iint} f(x,y)\,dx\,dy$, og vi setter

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\iint} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Teorem: La $R = [a,b] \times [c,d]$ og la f være en kontinuerlig funksjon på R. Da er f integrerbar.

Eksempel: $R = [0,1] \times [0,1]$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dersom } x \text{ er rasjonal} \\ 1 & \text{dersom } x \text{ er irrasjonal.} \end{cases}$$



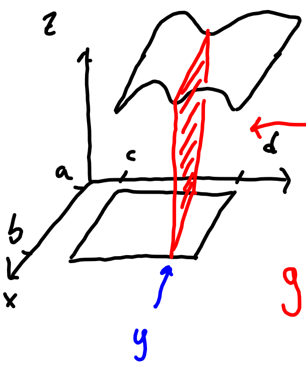
$$N(\Pi) = \sum_{i,j} m_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = 0$$

$$\Phi(\Pi) = 1$$

$N(\Pi) \neq \Phi(\Pi)$, så f er ikke integrerbar.

Husk: $[a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ og } y \in [c,d]\}$.

Hvordan regne ut et integral?



$z = f(x,y)$.

Arealet til skiva:

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Volumet er: $\int_c^d g(y)\,dy$.

Teorem: La f være en kontinuerlig funksjon på $R = [a,b] \times [c,d]$.

Da er

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Eks: $R = [0,1] \times [0,1]$

$f(x,y) = x^3 \cdot y^7$.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^3 y^7\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{4} x^4 y^7 \right]_0^1 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} y^7\,dy = \frac{1}{32}.$$

```
>> f=inline('x.^3.*y.^7')

f =

     Inline function:
     f(x,y) = x.^3.*y.^7

>> dblquad(f,0,1,0,1)

ans =

    0.0313

>> 1/32

ans =

    0.0313
```

EKS: $f(x,y) = x e^{xy}$

$R = [0,1] \times [0,1]$.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x e^{xy}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\left[e^{xy} \right]_0^1 \right) dx$$

$$= \int_0^1 e^x - 1 \, dx = \cdots$$

Kan ikke gjerne regne det i omvendt rekkefølge!

feb 28-10:58

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 x e^{xy}\,dx}_{} \Big)\,dy.$$

$$u = x \qquad v' = e^{xy}$$

$$u' = 1 \qquad v = \frac{1}{y} e^{xy}$$

tvilsomt.

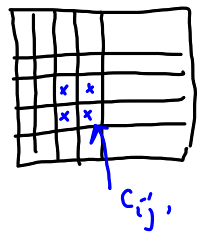
$$= \left[\frac{x}{y} e^{xy} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{y} e^{xy}\,dx$$

$$= \frac{1}{y} e^{y} - \frac{x}{y} - \int$$

Riemannsummer:

La $R = [a,b] \times [c,d]$.

La Π være partisjon.



Et <u>utplukk</u> U av Π er nå en mengde punkter $c_{ij} \in R_{ij}$ for alle i,j.

Definer $R(\Pi, U) = \sum_{i,j} f(c_{ij}) \cdot |R_{ij}|$

$$|R_{ij}| = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Ser at $N(\Pi) \leq R(\Pi, U) \leq \Phi(\Pi)$

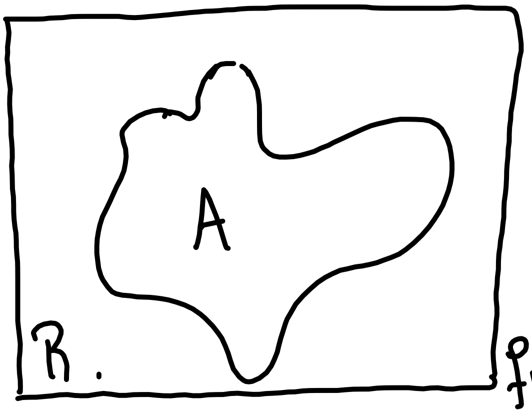
Setter $|\Pi| = \max \left\{ \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \right\}$.

Kalles maskevidde.

Setning: Anta at $\{\Pi_n\}$ er en følge partisjoner av et rektangel R s.a. $|\Pi_n| \to 0$.
La U_n være et utplukk for R_n for alle n.
For enhver f som er integrerbar på R har vi at

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n \to \infty} R(\Pi_n, U_n).$$

Dobbeltintegraler over begrensede områder



La $A \subset \mathbb{R}^2$ være et begrenset område. La $f : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon.

$$\text{Definer } f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{for } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{for } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

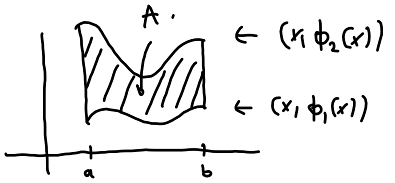
<u>DEF</u>: Velg et rektangel R s.a. $A \subset R$. Definer

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy := \iint_R f_A(x,y)\,dx\,dy,$$

hvis funksjonen f_A er integrerbar.

Type 1-område: La $[a,b]$ være et intervall, og la $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlige funksjoner s.a. $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ for alle $x \in [a,b]$.

Sett $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$.

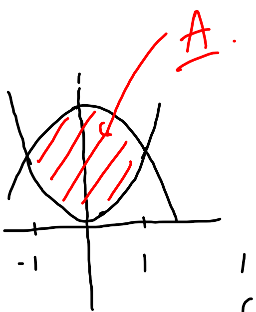


SETNING 6.2.1: Anta at A e et type1-område og at f e kont. på A. Da er f integrerbar på A og

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

EKSEMPEL: La $A = \{(x,y) : x^2 \leq y \leq 2-x^2,\ -1 \leq x \leq 1\}$.

$f(x,y) = y$.



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{2-x^2} y\,dy \right) dx$$

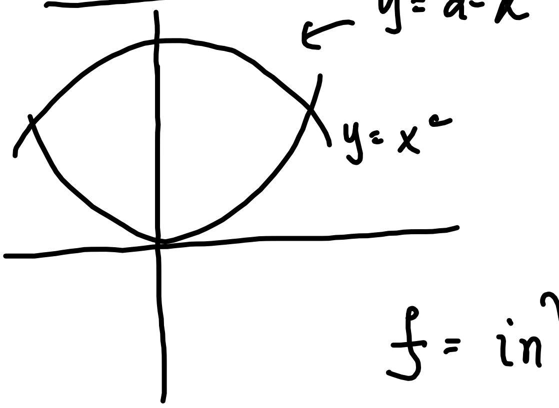
$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{2-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2 - (x^2)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 4 - 4x^2\,dx = \underline{2 \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx}$$

feb 28-11:42

MATLAB:



$f(x,y)=y$.

f = inline('y.*(y<=2-x.^2).*(x.^2<=y)')