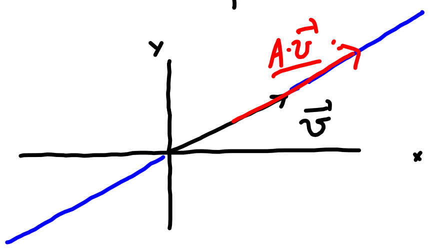
Egenverdier og egenvektorer.

DEF: La A være en $(n\times n)$-matrise.
En vektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{v}\neq\vec{0}$,
s.a. $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\lambda\in\mathbb{R}$,
sies å være en egenvektor,
og λ sies å være en egenverdi.



Hvordan finne egenvektorer og -verdier?

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$$
$$\iff \lambda\vec{v}-A\vec{v}=0$$
$$\iff \lambda\cdot I_n\cdot\vec{v}-A\vec{v}=0$$
$$\iff (\lambda\cdot I_n-A)\cdot\vec{v}=0.$$

Så: $\vec{v}$ er en egenvektor dersom den er en ikke-triviell løsning til ligningen $(\lambda I_n-A)\vec{x}=0$.

Så det fins en egenvektor $\vec{v}$ hviss λI_n-A ikke er invertibel for $\lambda\in\mathbb{R}$.

Lemma 4.10.1 λ er en egenverdi hviss $\det(\lambda\cdot I_n-A)=0$.

apr 28-10:13

Eks: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ Finn egenverdier og -vektorer for A.

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(\lambda-1)\cdot\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

Så egenverdiene er $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorer:

$\lambda_1 = 2$: Er ute etter $\vec{v}_1$ s.a. $A \cdot \vec{v}_1 = 2 \cdot \vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$x - 2y = 2x.$$

$$-x = 2y \rightarrow x = -2y$$

Så en løsning er $\underline{\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

Sjekk: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

apr 28-10:25

$\lambda_2 = -1$: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

$$x - 2y = -x$$
$$-x = -y \qquad \underline{x = y}.$$

$$\underline{v_2 = (1,1)}.$$

<u>Merk</u>: Dersom $\vec{v}$ er en egenvektor for A, så er også $t \cdot \vec{v}$ egenvektor for $t \neq 0$.
Fordi: $A(t \cdot \vec{v}) = t \cdot A\vec{v} = t \cdot \lambda \cdot \vec{v}$
$= \lambda \cdot t \cdot \vec{v}$.

<u>DEF</u>: $\det(\lambda I_n - A)$ kalles det karakteristiske polynomet til A.

<u>Eks</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix} = 0$$
$$(\lambda-1)(\lambda+3) + 4 = 0$$
$$\lambda^2 + 3\lambda - \lambda - 3 + 4 = 0$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
$$(\lambda+1)^2 = 0.$$

Se at nå fins bare <u>en</u> egenverdi, $\underline{\lambda} = -1$.

Egenvektorer: Løse $A\vec{v} = -\vec{v}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x - 2y = -x \iff 2x = 2y$$
$$2x - 3y = -y$$

Så vi kan sette $\vec{v}_1 = (1,1)$.

Er også bare <u>en</u> egenvektor.

apr 28-10:32

Eks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ Finn egenverdie og egenvektrer for A.

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = 0$$
$$(\lambda-1)^2 + 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \leftarrow \text{Karakteristisk ligning.}$$
$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Fins ingen reelle egenverdie til A

$\lambda = 1 \pm 2i$ e komplekse egenverdie for A.

Egenvektrer:

$\lambda_1 = 1+2i$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2i)x \\ (1+2i)y \end{pmatrix}$

(i) $x + 2y = (1+2i)x$ $\quad 2ix = 2y$

(ii) $-2x + y = (1+2i)\cdot y$ $\quad y = ix$

(i) $\cancel{x - 2ix + 2y = 0}$ $\quad \vec{v} = (1, i).$

$\cancel{(1-2i)x = -2y}$

$\cancel{y = -\frac{1}{2}(1-2i)x}$

~~Så vi kan sette~~ $\vec{v}_1 = \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-2i) \end{pmatrix}}.$

Påstår at $\vec{v}_2 = (1, -i)$.

SETNING 4.10.4 La A være en reell $(n \times n)$-matrise og la $\vec{v}$ være en kompleks egenvektor for A med kompleks egenverdi λ. Da er $\overline{\vec{v}}$ en egenvektor med egenverdi $\overline{\lambda}$.

$\lambda = a + ib$

$\overline{\lambda} = a - ib$

Bevis:
$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$
$$\overline{A\vec{v}} = \overline{\lambda\vec{v}}$$
$$\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{v}}$$

Siden A e reell $\quad A\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\cdot\overline{\vec{v}}$.

apr 28-10:43

Symetriske matriser

DEF: En $(n\times n)$-matrise A e symetrisk dersom $A^T = A$.

Teorem 4.10.6 En symetrisk $(n\times n)$-matrise A har n reelle egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, med tilhørende egenvektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ som danner en basis for $\mathbb{R}^n$.

Merk: Flere av egenverdiene kan være like. Eks: I_n.

```
>> A=[1 2 3 4;2 3 1 5;3 1 7 3;4 5 3 2]

A =

     1     2     3     4
     2     3     1     5
     3     1     7     3
     4     5     3     2

>> A'-A

ans =

     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

>> [u v]=eig(A)

u =

    0.4575    0.7838    0.0564    0.4162
    0.4455   -0.5306    0.5779    0.4313
    0.0465   -0.2900   -0.7471    0.5963
   -0.7682    0.1416    0.3235    0.5341


v =

   -3.4636         0         0         0
         0   -0.7417         0         0
         0         0    4.7011         0
         0         0         0   12.5041

>> inv(u)*A'u
 inv(u)*A'u
        |
Error: Unexpected MATLAB expression.

>> inv(u)*A*u

ans =

   -3.4636    0.0000    0.0000   -0.0000
    0.0000   -0.7417   -0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000    4.7011         0
    0.0000   -0.0000    0.0000   12.5041

>>
```

apr 28-11:15

Konjugasjon.

La A være en $(n \times n)$-matrise, og anta at A har $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ lineært uavhengige egenvektorer med egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Dann $P = [\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n]$.

Da har vi

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} = B$$

Sier at A er konjugert med B.

Anvendelser.

La $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{bmatrix}$, og la $\vec{v} = (3,2)$.

Beskriv følgen $A^K \cdot \vec{v}$ når $K \to \infty$.

$$A^K = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{K \text{ ganger}}.$$

For å beskrive følgen regner vi ut egenverdier og egenvektorer.

- $\det(\lambda I_2 - A) = 0$

  $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/6$.

- $\vec{v}_1 = (2,3)$.
  $\vec{v}_2 = (1,-1)$.

$$\boxed{\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \lambda_1 \vec{v}_1 \\ A^2 v_1 = A \cdot A v_1 &= \lambda_1(\lambda_1 v_1) = \lambda_1^2 v_1 \ldots \end{aligned}}$$

Merk først at det er lett å beskrive $A^K \cdot \vec{v}_1$ og $A^K \cdot v_2$. Disse følgene er rett og slett $\underline{\lambda_1^K \cdot v_1}$. og $\underline{\lambda_2^k \cdot \vec{v}_2}$.

Nå kan vi skrive $\vec{V}$ som en lineærkombinasjon av $\vec{V}_1$ og $\vec{V}_2$.

$\vec{V} = (3,2) = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

Får vi at $A^K \vec{V} = A^K(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$

$$\begin{aligned} &= A^K \vec{V}_1 + A^K \cdot \vec{V}_2 \\ &= \lambda_1^K \cdot \vec{V}_1 + \lambda_2^k \cdot \vec{V}_2 \\ &= 1^k \cdot \vec{V}_1 + \underbrace{(1/6)^K \cdot \vec{V}_2}_{\to 0 \text{ når } K \to \infty} \end{aligned}$$

Så vi ser at $\lim_{K \to \infty} A^K \cdot \vec{V} = \vec{V}_1 = (2,3)$.

Eks:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Husk:} \quad x'(t) = a \cdot x(t) \\ \text{løsning:} \quad x(t) = e^{a \cdot t}\end{array}}$$

Se på ligningssystemet

$x'(t) = x(t) - 2 \cdot y(t)$.

$y'(t) = -x(t)$.

På matriseform: $\underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{v'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{v(t)}$.

Så i steed at $\vec{v}_1 = (-2,1)$ og $\vec{v}_2 = (1,1)$ er egenvektorer for A med egenverdier $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$.

Det betyr: $A\vec{v}_1 = 2 \cdot \vec{v}_1$

Så hvis vi setter $w_1(t) = e^{2t} \cdot \vec{v}_1$

Vi får at $w_1'(t) = 2e^{2t} \cdot \vec{v}_1 = 2 \cdot w_1(t)$,

så $w_1(t)$ er en løsning.

Tilsvarende med $\vec{v}_2$ og λ_2:

$$\boxed{W_2(t) = e^{-t} \cdot \vec{v}_2}$$

$W_2'(t) = -e^{-t} \cdot \vec{v}_2 = A \cdot W_2(t)$.

Alle løsninger er nå på formen

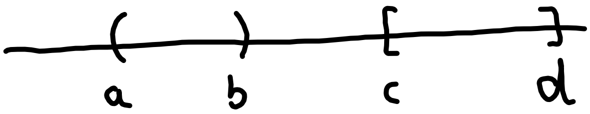
$$w(t) = c_1 \cdot e^{2t} \cdot (-2,1) + c_2 \cdot e^{-t} (1,1).$$

der c_1 og c_2 er reelle tall.

Er ofte ute etter den løsningen som tilfredsstiller $w(0) = (x_0, y_0)$. Løs c_1 og c_2 for dette.

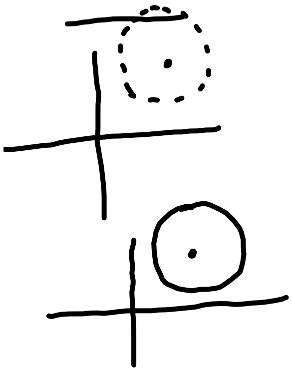
Litt topologi i $\mathbb{R}^n$

I $\mathbb{R}$:



åpent int. lukket int.

I $\mathbb{R}^m$: La $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$.



$B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$ åpen kule/ball.

$\overline{B}(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$ lukket kule/ball.