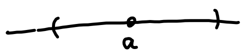
## Litt regning med potensrekker

Betrakt en potensrekke

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$



med konvergensintervall $(a-r, a+r)$.

Håper at $f$ er deriverbar og

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-a)^{n-1} . \\ \text{(ii)} & \int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x-a)^{n+1} . \end{array}\right\} \text{ER FATISK SANT.}$$

Hva er dette godt for?

Nyttig for å kunne summere rekker.

**Eks:** Finn summen til rekka

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} .$$

Ligner litt på $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ bortsett fra n'en i nevneren.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{n} \frac{x^{n-1}}{\cancel{n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Så $f$ er gitt ved integralet til $\frac{1}{1-x}$, altså

$$f(x) = -\ln(1-x) + C .$$

Ser av rekka at $f(0) = 0$

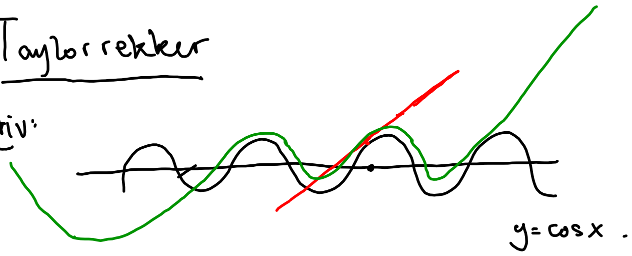
$$f(0) = -\ln(1-0) + C = C ,$$

så $C = 0$, og

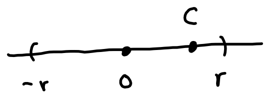
$$\underline{\underline{f(x) = -\ln(1-x)}} .$$

# Taylorrekker

Motiv:




Dersom $f$ er $(m+1)$ ganger deriverbar på $(-r, r)$, så har vi




$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2}\cdot f^{(2)}(0)\cdot x^2 + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m}_{\text{Kalles Taylorpolynomet til } f \text{ av grad } m\text{, og betegnes } T_m f(x).} + \underbrace{\frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c)\cdot x^{m+1}}_{\text{Restledd } R_m f(x).}$$

Taylorrekka får vi når vi lar $m = \infty$,

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

Når er en funksjon lik sin Taylorrekke?

Eks: Finn Taylorrekka til $e^x = f(x)$

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n.$$

Siden $(e^x)' = e^x$ får vi $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ for alle $n$, så

$$\underline{Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$ (Konvergerer på hele $\mathbb{R}$).

Vil nå vise at $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Fikserer et intervall $[-R, R]$.

$$e^x = T_m f(x) + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}\cdot x^{m+1}$$

$$\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} \leq \frac{e^R}{(m+1)!} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

# Eksamen 2012

1 (a) $u = -1$

$y = 3{,}6 - 2z$

$x = z - 1{,}2$ .

(b) Fra (a) har vi at

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(z - \tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + (3{,}6 - 2z)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ z \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sett $z = 0$, og vi får en lineærkombinasjon av 3 vektorer.

Oppgave 2)

(a) Finn stasjonære punkter for

$$f(x,y) = x^2y - 4xy - y^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - 4y = 2y(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 4x - 2y.$$

Stasjonære pkt. vil si $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(i) $y = 0$. Da må $x^2 - 4x = 0$

$x(x-4)$

Så $\underline{(0,0)}$ og $\underline{(4,0)}$ er stasjonære pkt.

(ii) $x = 2$. Da må $2^2 - 4\cdot 2 - 2y = 0$

$-2y = 4$

$y = -2$.

Så $\underline{(2,-2)}$ et stasjonært punkt.

(b) Avgjør typen til de stasjonære punktene.

Regner ut Hessematrisen

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2(x-2) \\ 2(x-2) & -2 \end{bmatrix}$$

Sjekker punktene:

$(0,0)$: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -16$,

så vi har et sadelpunkt.

$(4,0)$: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -16$

så vi har et sadelpunkt.

$(2,-2)$: $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8$

(enten lokalt maks eller min.).

Siden $-4 < 0$ er det et lok. maks.

mai 30-11:14

Oppg. 3) Finn den inverse til matrisen $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dette er inversen.

Vis at

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - x - y + 1 \\ x - y^2 + 2y - 2 \end{pmatrix}$$

har en omvendt funksjon $G$ definert i et område rundt punktet $\binom{1}{-2}$, s.a. $G(1,-2) = (0,0)$.

Ser at $F(0,0) = (1,-2)$ så vi må vise at $F'(0,0)$ er invertibel.

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-1 & -1 \\ 1 & 2-2y \end{bmatrix}$$

$$F'(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

og denne har vi sett at er invertibel.

Finn $G'(1,-2)$.

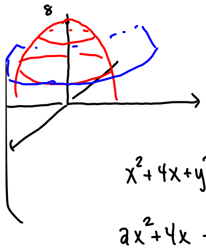
$$G'(1,-2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5.

Vis at volumet til området som ligger under flaten $z=8-x^2-y^2$ og over flaten $z=x^2+4x+y^2-8y$ er gitt ved

$$V=\iint_S (8-2x^2-4x-2y^2+8y)\,dx\,dy.$$

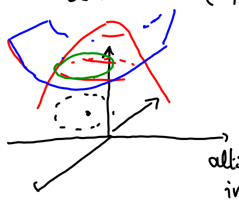
der $S$ er sirkelen i $(x,y)$-planet med senter $(-1,2)$ og radius 3.




Vi må finne $(x,y)$-koordinatene der flatene skjærer hverandre.

$$x^2+4x+y^2-8y=8-x^2-y^2$$
$$2x^2+4x+2y^2-8y=8 \qquad :2$$
$$x^2+2x+y^2-4y=4$$
$$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4=4$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2=9.$$

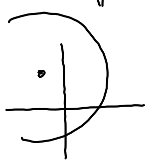
Dette fremstiller en sirkel med radius 3 sentrert i $(-1,2)$.



Så for å finn volumet må vi integrere differensen av $z$-verdiene, altså akkurat inni integralet.

(b) Regn ut volumet $V$.

$$V=\iint_S (8-2x^2-4x-2y^2+8y)\,dx\,dy.$$



Innfører polar-koordinater

$x=-1+r\cos t$, $y=2+r\sin t$,

$0\le t\le 2\pi$, $0\le r\le 3$.

Fullfør kvadratene for uttrykket inni integralet og vi får at

$$V=2\cdot\iint_S 9-(x+1)^2-(y-2)^2\,dx\,dy.$$

i polarkoordinater:

$$V=2\int_0^{2\pi}\int_0^3\left[9-(r\cos t)^2-(r\sin t)^2\right]r\,dr\,dt$$
$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^3(9-r^2)\cdot r\,dr\,dt$$
$$=2\cdot 2\pi\int_0^3 9r-r^3\,dr=\dots=\underline{\underline{81\pi}}.$$