Gauss.

EKS: Løs

$$\begin{aligned}
&(i) && x+y+z=2 \\
&(ii) && x-y-2z=1 && \div (i) \\
&(iii) && 2x+y+z=0 && \div 2\cdot(i)
\end{aligned}$$

$x+y+z=7$
$y+35z=100$
$2z=1$

$$\begin{aligned}
&(i) && x+y+z=2 \\
&(ii) && -2y-3z=-1 \\
&(iii) && -y-z=-4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(i) && x+y+z=2 \\
&(ii) && y+z=4 \\
&(iii) && 2y+3z=1 && \div 2\cdot(ii)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(i) && x+y+z=2 \\
&(ii) && y+z=4 \\
&(iii) && z=-7
\end{aligned}$$

løsning: $x=-2$, $y=11$, $z=-7$.

EKS:

$$\begin{aligned}
x+y+z&=1 \\
x-y+z&=2 \\
3x+y+3z&=3.
\end{aligned}$$

Assosierte matrisen: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Kalles den utvidete matrisen til ligningssystemet. Er en 1-1 korrespondanse mellom ligningssystemer og utvidete matrise, så vi kan utføre operasjonene over på matrisen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \div (i) \\ \div 3\cdot(i) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \div (ii) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot -\frac{1}{2} \\ \cdot -1 \end{matrix}$$

til ligningss.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 0x-2y+0z &= 1 \\ 0x+0y+0z &= -1. \end{aligned}$$

umulig å løse.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEF: La A være en $(m\times n)$-matrise. Følgende operasjoner kalles elementære radoperasjoner på A

(i) Multiplisere en rad med et tall forskjellig fra null,

(ii) Bytte om to rader,

(iii) Legg et multiplum av en rad til en annen.

DEF: Dersom en matrise A kan omformes til en matrise B ved å gjennomføre et endelig antall radoperasjoner sier vi at A er ekvivalent med B. Skriver da $A \sim B$.

DEF: En matrise A er på trappeform dersom

(i) Enhver rad består enten bare av nuller, eller første element i en rad er et ettall.

(ii) Enhver rad som ikke bare består av nuller begynner med minst en null mer enn raden over.

EKS:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{trappe form.}$$

- pivot-elementer
- pivot-søyler.

SETNING 4.2.3 Enhver matrise er ekvivalent med en matrise på trappe form.

EKS:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

MATLAB.

SETNING 4.2.4: Anta at den utvidede matrisen til et ligningssystem kan reduseres til en matrise C på trappeform.

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle har systemet ingen løsninger.

Ellers:

(ii) Dersom alle de andre søylene er pivotsøyle har systemet nøyaktig en løsning,

(iii) Dersom minst en av de andre søylene ikke er pivot har vi uendelig mange løsninger.

Eks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{systemet}} \begin{aligned} x + 3y + 7z &= 4 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

EKS:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x + z &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

$y = 1 - z$

$x = 1 - z$

z er en fri variabel, og vi uendelig mange løsninger.

SETNING 4.2.6:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

La $A \sim C$ der C er en trappematrise. Da har ligningssystemet med utvidet matrise $[A\ \vec{b}]$ en løsning for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ hviss alle radene i C har et pivot-element.

"Bevis":

- Anta først at alle rader har pivot-element.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} 1 & 0 & ? & \cdots & ? & \tilde{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & ? & \tilde{b}_2 \\ 0 & \cdots & & & 1 & \tilde{b}_m \end{matrix}$$

Poeng: Siste søyle kan ikke bli pivot uansett hvilken $\vec{b}$ vi setter inn.

- Dersom ikke alle rader i C har pivot-elementer står det bare nuller i en rad.

$$\begin{matrix} 1 & \cdots & c_{1m} & 0 \\ 0\ 0\ 1 & \cdots & c_{2m} & \vdots \\ 0\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & 0 \\ 0\ 0\ 0 & & 0 & 1 \end{matrix}$$

Som før ville vi hatt $0 = 1$.

mar 31-11:29

SETNING 4.2.7: $A \sim C$, der C er en trappematrise.

Ligningssystemet med utvidet matrise $[A \ \vec{b}]$ har en entydig løsning for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ hviss alle rader og alle søyler har pivot-elementer.

I så fall er A en kvadratisk matrise.

4.3 Redusert trappeform

DEF: A er på redusert trappeform dersom A er på trappeform og alle tall i en pivotsøyle bortsett fra pivotelementet er null.

EKS:

ikke er null.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \div 3 \cdot (ii) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

IKKE REDUSERT TRAPPEFORM!

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \div (iii) \\ \div (iii) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Redusert trappeform}$$

SETNING: Enhver matrise er ekvivalent med en matrise på redusert trappeform.