# Eksamen i MAT1110, 14/8 2015: Løsningsforslag

**Oppgave 1.** a) Vi har

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-3 & a-2 \end{pmatrix} \overset{II+2\cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2-3 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{pmatrix} = B$$

b) Legg merke til at systemet har $A$ som utvidet matrise. Dersom $a^2-1 \neq 0$, er alle de tre første søylene i trappeformen $B$ pivotsøyler, og systemet har dermed en entydig løsning. Det vil si at vi har entydig løsning for $a \neq \pm 1$. Det gjenstår å sjekke hva som skjer for $a = 1$ og $a = -1$.

$\underline{a = 1}$: I dette tilfellet er ingen av de to siste søylene pivotsøyler (de nederste elemente er null). Det betyr at vi har uendelig mange løsninger.

$\underline{a = -1}$: I dette tilfellet er den siste søylen en pivotsøyle (det nederste elementet i den tredje søylen er null, men ikke det nederste elementet i den siste), og vi har derfor ingen løsninger.

Konklusjon: Systemet har entydig løsning for $a \neq \pm 1$, uendelig mange løsninger for $a = 1$, og ingen løsninger for $a = -1$.

c) Når $a = 1$, er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at vi kan velge fritt $z$, og beregne $x$ og $y$ etter ligningene

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -1 \\ y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Dette gir $y = 1 + 2z$ og $x = -1 - y + 2z = -1 - (1 + 2z) + 2z = -2$. Følgelig er løsningene

$$x = -2, \quad y = 1 + 2z, \quad z = z$$

der $z$ er et fritt valgt reelt tall.

**Oppgave 2.** Vi bruker først forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}(x-1)^{n+1}}{\frac{2^n}{n^2}(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} 2|x-1| \frac{(n+1)^2}{n^2} = 2|x-1| \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^2 = 2|x-1|$$

Vi vet vi har konvergens når $2|x-1| < 1$ og divergens når $2|x-1| > 1$. Dette gir konvergens for $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ og divergens for $x < \frac{1}{2}$ og $x > \frac{3}{2}$. Det gjenstår å sjekke endepunktene $x = \frac{1}{2}$ og $x = \frac{3}{2}$.

$x = \frac{3}{2}$: Rekken blir nå

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(\frac{1}{2} - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

som konvergerer, f.eks. ved testen for alternerende rekker.

$x = \frac{3}{2}$: Rekken blir nå

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(\frac{3}{2} - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

som er en rekke vi vet konvergerer.

Konklusjon: Konvergensintervallet er $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

**Oppgave 3.** a) Vi kan skjekke at feltet er konservativt ved å observere at de partiellderiverte

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$$

er like (siden definisjonsområdet er enkeltsammenhengende, medfører at dette at feltet er konservativt), men det er egentlig unødvendig siden alt vi trenger er en potensialfunksjon $\phi$. En slik $\phi$ må oppfylle

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (2xy + 2) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = (x^2 + 3)$$

Integrerer vi den første ligningen, får vi at

$$\phi(x, y) = x^2 y + 2x + C(y)$$

der $C$ er en funksjon som bare avhenger av $y$. Integrerer vi den andre ligningen, får vi

$$\phi(x, y) = x^2 y + 3y + D(x)$$

der $D$ er en funksjon som bare avhenger av $x$. For å få dette til å passe setter vi $C(y) = 3y$, $D(x) = 2x$ og ender opp med

$$\phi(x, y) = x^2 y + 2x + 3y$$

.

b) Linjeintegralet kan regnes ut direkte, men det er enklere å bruke potensialfunksjonen. Siden kurven starter i $(1, 1)$ og ender i $(2, 4)$, har vi

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(2, 4) - \phi(1, 1) = 2^2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - (1^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 32 - 6 = 26$$

**Oppgave 4.** a) Flatene skjærer hverandre når

$$x^2 + y^2 = 2x - 4y + 4,$$

det vil si når

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4$$

Fullfører vi kvadratene, får vi

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9,$$

som er en sirkel med sentrum i $(1, -2)$ og radius 3. $D$ er området innenfor sirkelen, dvs. sirkelskiven med sentrum i $(1, -2)$ og radius 3. For å avgjøre hvilken flate som ligger øverst over $D$, setter vi inn koordinatene til et punkt vi vet ligger i $D$, f.eks. $(1, -2)$. For planet får vi

$$z = (2\cdot)1 - 4 \cdot (-2) + 4 = 14$$

og for paraboloiden

$$z = 1^2 + (-2)^2 = 5$$

Altså ligger planet øverst, og volumet er gitt ved

$$V = \iiint_R 1 \, dxdydz = \iint \left( \int_{x^2+y^2}^{2x-4y+4} 1 \, dz \right) dxdy$$

$$= \iint \big(2x - 4y + 4 - (x^2 + y^2)\big) \, dxdy$$

$$= \iint_D (-x^2 + 2x - y^2 - 4y + 4) \, dxdy$$

b) For å regne ut volumet innfører vi polarkoordinater med sentrum i $(1, -2)$. Vi setter $x = 1 + r\cos\theta, y = -2 + r\sin\theta$ og observerer at integranden kan skrives

$$-x^2 + 2x - y^2 - 4y + 4 = -(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) + 9$$

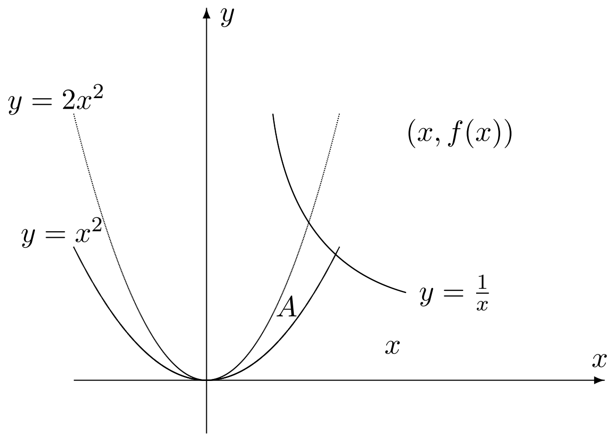
$$= -(x-1)^2 - (y+2)^2 + 9 = 9 - (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = 9 - r^2$$

Dermed er (husk Jacobi-faktoren $r$)

$$V = \int_0^3 \left( \int_0^{2\pi} (9 - r^2) r \, d\theta \right) dr = \int_0^3 \left( \int_0^{2\pi} (9r - r^3) \, d\theta \right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 (9r - r^3) \, dr = 2\pi \left[ \frac{9}{2} r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^3 = 2\pi \left( \frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) = \frac{81\pi}{2}$$

**Oppgave 5.** Omrrådet ser omttent slik ut:




Vi skal skifte variable i dobbeltintegralet. Avgrensningene $y = x^2$, $y = 2x^2$ kan omformes til $\frac{y}{x^2} = 1$ og $\frac{y}{x^2} = 2$, mens avgrensning $y = \frac{1}{x}$ kan skrives som $xy = 1$. Vi innfører nye variable ved

$$u = \frac{y}{x^2} \qquad \text{og} \qquad v = xy$$

Området kan nå beskrives ved $1 < u < 2$ og $0 < v < 1$ (den nederste grensen for $v$ må man tenke litt på – det hjelper å tegne opp kurvene $\frac{y}{x^2} = u$ og $xy = v$ for $u$ mellom 1 og 2 og $v$ mellom 0 og 1, og se hvordan de "koordinatiserer" $A$). Vi løser for $x$ og $y$ ved å observere at

$$\frac{v}{u} = \frac{xy}{\frac{y}{x^2}} = x^3 \quad \text{som gir} \quad x = u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}$$

og

$$y = \frac{v}{x} = \frac{v}{u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}} = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$$

Jacobi-determinanten blir

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9}u^{-1} - \frac{1}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3}u^{-1}$$

Siden $xy = v$, har vi nå

$$\iint_A xy\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^1 v\frac{1}{3}u^{-1}\,dv\right) du = \frac{1}{3}\int_1^2 u^{-1}\left[\frac{v^2}{2}u\right]_0^1 dv$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{v}\,dv = \frac{1}{6}\Big[\ln v\Big]_1^2 = \frac{\ln 2}{6}$$

Oppgaven kan også løses uten å skifte variabel ved å dele opp integrasjonsområdet

**Oppgave 6.** Hvis vi legger inn et koordinatsystem med origo i sentrum til ellipsen og akser langs ellipsens akser, får ellipsen ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Lar vi $(x, y)$ være koordinatene til punktet $B$, ser vi at arealet til trekanten er

$$f(x, y) = \frac{1}{2} 2y(a + x) = y(a + x) = xy + ay$$

Samtidig må $(x, y)$ tilfredsstille bibetingelse $g(x, y) = 1$ der

$$g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Dette gir

$$\nabla f(x, y) = (y, x + a) \qquad \text{og} \qquad \nabla g(x, y) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$$

Etter Lagranges multiplikatormetode er vi på jakt etter punkter der $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ for en konstant $\lambda$ (den andre muligheten, $\nabla g(x, y) = 0$, gir åpenbart ikke et maksimum i dette tilfellet). Vi får ligningene

$$y = \frac{2\lambda x}{a^2} \tag{1}$$

$$x + a = \frac{2\lambda y}{b^2} \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

når vi tar med bibetingelsen. For å bli kvitt $\lambda$ har vi lyst til å dele ligning (1) på ligning (2), men da må vi passe på at vi ikke mister løsninger når nevnerne er 0. Det er ikke noe problem: $x + a = 0$ gir åpenbart ikke noe maksimumspunkt, og det gir heller ikke $\lambda = 0$ eller $y = 0$ ($\lambda = 0$ gir $y = 0$ ifølge ligning (1)).

Vi kan dermed dele (1) på (2) og få

$$\frac{y}{x + a} = \frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{y}{b^2}}$$

Dette kan omformes til

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a}$$

Setter vi dette inn i (3), får vi

$$2\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} = 1$$

som kan skrives

$$2x^2 + ax - a^2 = 0$$

Dette gir

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-a \pm 3a}{4} = \begin{cases} \frac{a}{2} \\ \\ -a \end{cases}$$

Siden $x = -a$ åpenbart ikke gir et maksimumspunkt, er den eneste løsningskandidaten $x = \frac{a}{2}$. Siden problemet må ha en løsning i følge ekstremalverdisetningen (vi maksimerer en kontinuerlig funksjon over et lukket, begrenset område), er $x = \frac{a}{2}$ løsningen. Den tilhørende $y$-verdien er

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = b\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

og det maksimale arealet blir dermed

$$A = y(a + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}b(a + \frac{a}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}b\frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$

Oppgaven kan også løses ved å sette inn $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ i uttrykket for arealet, $y(a + x)$. Dette gir omtrent like kompliserte regninger.