Løsningsforslag til eksamen i MAT1110, 10/6-2015

Oppgave 1. a) Vi partiellderiverer funksjonen $f(x,y) = 2x^2y + 2xy + y^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 2y = 2y(2x+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2x + 2y = 2(x^2 + x + y)$$

I et stasjonært punkt må begge de partiellderiverte være null. Fra det første uttrykket ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial x}$ være null, må $y = 0$ eller $x = -\frac{1}{2}$. Vi drøfter disse tilfellene hver for seg:

$\underline{y = 0}$: Setter vi $y = 0$ inn i det andre uttrykket, ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial y}$ være 0, må $x^2 + x = 0$. Det betyr at $x = 0$ eller $x = -1$. Dermed har vi de kritiske punktene $(0,0)$ og $(-1,0)$.

$\underline{x = -\frac{1}{2}}$: Setter vi $x = -\frac{1}{2}$ inn i det andre yttrykket, ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial y}$ være 0, må $(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + y = 0$. Dette gir $y = \frac{1}{4}$, og dermed er $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et kritisk punkt.

I alt har vi dermed tre kritiske punkter: $(0,0)$, $(-1,0)$ og $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

b) Vi skal bruke annenderiverttesten til å avgjøre hva slags kritiske punkter vi har. De annenderiverte er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x + 2, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Vi bruker annenderiverttesten på hvert av punktene:

$\underline{(0,0)}$: Vi har $A = 0$, $B = 2$, $C = 2$ og

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Siden $D < 0$, er $(0,0)$ et sadelpunkt.

$\underline{(-1,0)}$: Vi har $A = 0$, $B = -2$, $C = 2$ og

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Siden $D < 0$, er $(-1, 0)$ et sadelpunkt.

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$: Vi har $A = 1$, $B = 0$, $C = 2$ og

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Siden $D > 0$ og $A > 0$, er $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et lokalt minimum.

Oppgave 2. Vi bruker først forholdstesten til å finne konvergensradien:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{n2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n|x-2|}{2(n+1)} = \frac{|x-2|}{2}$$

Rekken konvergerer når $\frac{|x-2|}{2} < 1$, dvs. når $|x-2| < 2$, eller med andre ord når $0 < x < 4$. Rekken divergerer når $\frac{|x-2|}{2} > 1$, dvs. når $x < 0$ eller $x > 4$. De to grensetilfellene $x = 0$ og $x = 4$ må undersøkes nærmere:

$x = 0$: Rekken er nå $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Dette er en alternerende rekke der størrelsen på leddene avtar mot null, og følgelig er rekken konvergent.

$x = 4$: Rekken er nå $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dette er en velkjent divergent rekke.

Konklusjon: Konvergensintervallet er $[0, 4)$.

Oppgave 3. a) Den stykkevis glatte kurven $\mathcal{C}'$ vi får ved å sette sammen $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$, gjennomløper omkretsen til området vårt i postiv omløpsretning. Ifølge Greens teorem (ellet et av dets korollarer) er da

$$A = \int_{\mathcal{C}'} x\,dy = \int_{\mathcal{C}} x\,dy + \int_{\mathcal{D}} x\,dy$$

b) Vi observerer først at $\int_{\mathcal{D}} x\,dy = 0$ siden vi får $dy = 0$ når vi parametriserer linjestykket fra $(0, 0)$ til $(2, 0)$. For $\mathcal{C}$ ser vi at $dy = (\pi - 2t)\,dt$, og dermed har vi

$$A = \int_{\mathcal{C}} x\,dy + \int_{\mathcal{D}} x\,dy = \int_{\mathcal{C}} x\,dy$$
$$= \int_0^{\pi} (1 + \cos t)(\pi - 2t)\,dt$$

Det er flere måter å løse dette integralet på. Den mest naturlige er kanskje å bruke delvis integrasjon med $u = \pi - 2t$ og $v' = (1 + \cos t)$. Da er $u' = -2$ og $v = t + \sin t$, og vi får

$$A = \int_0^\pi (1+\cos t)(\pi - 2t)\,dt = \Big[(\pi - 2t)(t+\sin t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-2)(t+\sin t)\,dt$$

$$= -\pi^2 + 2\left[\frac{t^2}{2} - \cos t\right]_0^\pi = -\pi^2 + \pi^2 + 4 = 4$$

Oppgave 4. a) De to flatene skjærer hverandre når

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y$$

dvs. når

$$x^2 + 2x + y^2 = 3$$

Fullfører vi kvadratet, får vi

$$(x+1)^2 + y^2 = 4$$

som viser at skjæringskurven er en sirkel som har radius 2 og sentrum i $(-1, 0)$. For (x, y)-verdier innenfor denne sirkelen ligger paraboloiden $z = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y$ over $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y$, og arealet til området avgrenset av flatene er dermed gitt ved

$$V = \iint_D \big[(6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y) - (x^2 + 2x + y^2 - 4y)\big]\,dxdy$$

$$= 2\iint_D (3 - x^2 - 2x - y^2)\,dxdy$$

der D er sirkelskiven $(x+1)^2 + y^2 \leq 4$ med sentrum i $(-1, 0)$ og radius 2.

b) For å regne ut V skifter vi til polarkoordinater med sentrum i $(-1, 0)$, dvs. vi setter $x = -1 + r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Jacobi-determinanten er r, og vi får

$$V = 2\iint_D (3 - x^2 - 2x - y^2)\,dxdy = 2\iint_D (4 - (x+1)^2 - y^2)\,dxdy$$

$$= 2\int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r^2) r\,d\theta\,dr = 4\pi \int_0^2 (4 - r^2) r\,dr$$

$$= 4\pi \int_0^2 (4r - r^3)\,dr = 4\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi[8-4] = 16\pi$$

Oppgave 5. a) Vi ser at

$$A_n\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n\mathbf{v}_1$$

som viser at $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor med egenverdi n.

Dersom $\mathbf{u}$ står ortogonalt på $\mathbf{v}_1$, er $0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Dermed er

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + \cdots u_n \\ u_1 + u_2 + \cdots u_n \\ \vdots \\ u_1 + u_2 + \cdots u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0\mathbf{u}$$

som viser at $\mathbf{u}$ er en egenvektor med egenverdi 0.

Siden det finnes en *ortogonal* basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ som inneholder $\mathbf{v}_1$, må alle de andre egenvektorene $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ha egenverdi 0. Det betyr at A_n bare har to forskjellige egenverdier n og 0, og at multiplisitetene er henholdsvis 1 og $n-1$.

b) Det er mange måter å løse denne oppgaven på. Fra a) vet vi at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 3, og at alle vektorer som står normalt på $\mathbf{v}_1$, er egenvektorer med egenverdi 0. Det er derfor nok å finne to innbyrdes normale vektorer som står normalt på $\mathbf{v}_1$. En vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ står normalt på $\mathbf{v}_1$ dersom $x+y+z=0$. Ett naturlig valg er $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, og et annet er $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, og disse to er innbyrdes normale. Dermed er

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en ortogonal basis av egenvektorer med egenverdier 3, 0 og 0 (det er mange andre ortogonale basiser av egenvektorer for A_3).

c) Anta at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A_n med egenverdi λ. Da er

$$A_n(a)\mathbf{v} = ((a-1)I_n+A_n)\mathbf{v} = (a-1)I_n\mathbf{v}+A_n\mathbf{v} = (a-1)\mathbf{v}+\lambda\mathbf{v} = (a+\lambda-1)\mathbf{v}$$

som viser at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $A_n(a)$ med egenverdi $a + \lambda - 1$. Siden egenverdiene til A_n er n (med multiplisitet 1) og 0 (med multiplisitet $n-1$), så må vi for $A_n(a)$ ha:

$a + n - 1$ er en egenverdi med multiplisitet 1

$a - 1$ er en egenverdi med multiplisitet $n - 1$.

SLUTT