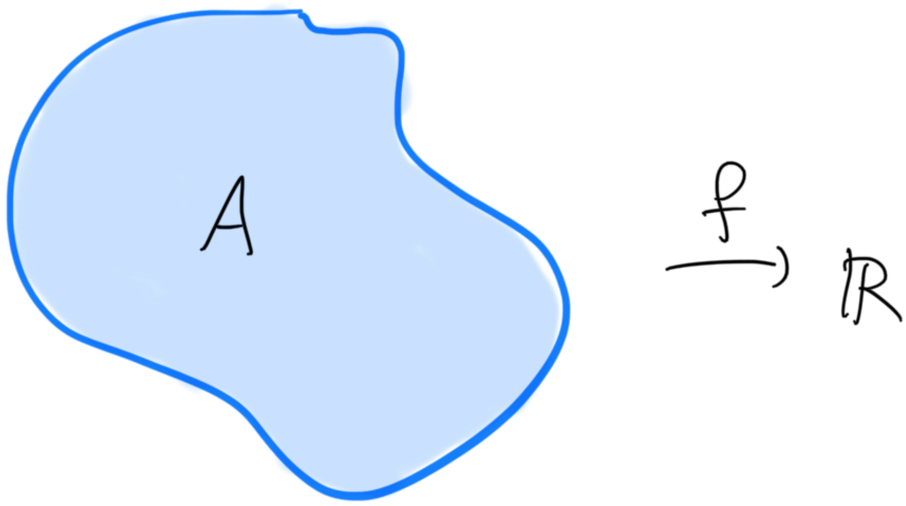
Litt topologi i $\mathbb{R}^m$

(Seksjon 5.1)

Egenskaper til mengder og funksjoner i $\mathbb{R}^m$.



Defn For $a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ definerer vi

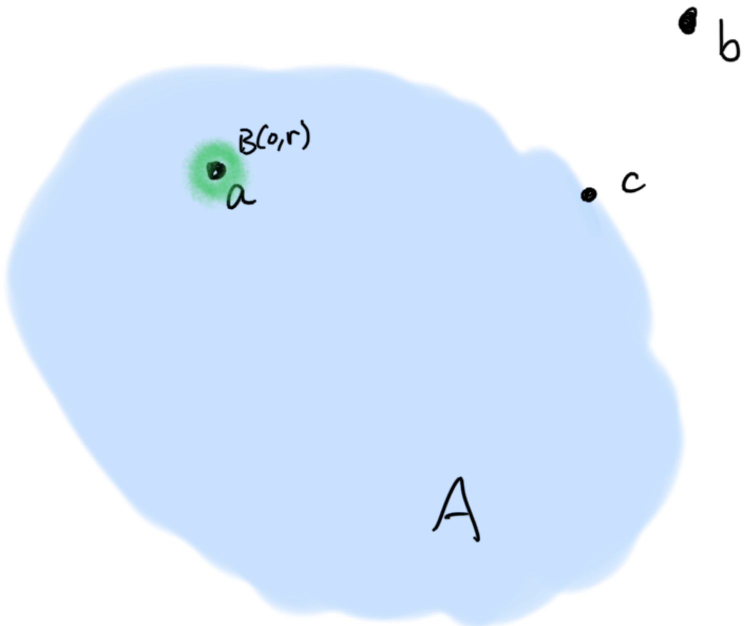
$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x-a| < r\}$$

"Åpen kule"

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x-a| \leq r\}$$

"Lukket kule"

Gitt en mengde $A \subseteq \mathbb{R}^m$



Tre muligheter for et punkt i $\mathbb{R}^m$:

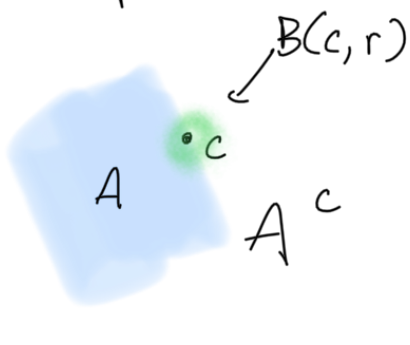
- $a \in A$ kalles et indre punkt dersom det fines en $B(a,r)$ inneholdt i A.

- $b \in \mathbb{R}^m$ kalles et ytre punkt dersom det fines en $B(b,r)$ utenfor A (altså: $B(b,r) \subseteq A^c$)

$$A^c = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \notin A\}$$

- $c \in \mathbb{R}^m$ kalles et randpunkt dersom enhver kule $B(c,r)$ inneholder både punkter i A og A^c

Merk: c trenger ikke være inneholdt i A!



Skriver ∂A = randpunktene til A.

Defn • A kalles lukket dersom $\partial A \subseteq A$

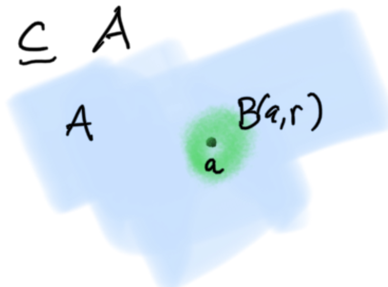
$\iff$ A inneholder alle sine randpunkter.

• A kalles åpen dersom $\partial A \subseteq A^c$

$\iff$ A inneholder ingen av sine randpunkter

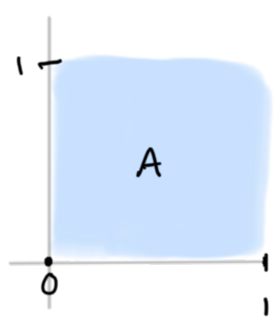
$\iff$ for alle $a \in A$ finnes en $B(a,r)$ s.a

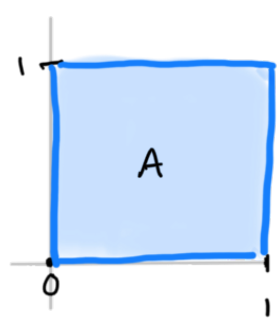
$B(a,r) \subseteq A$

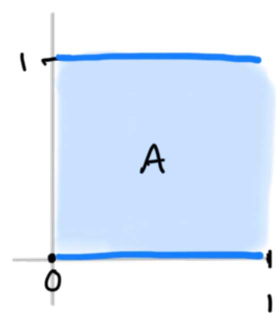


Eks

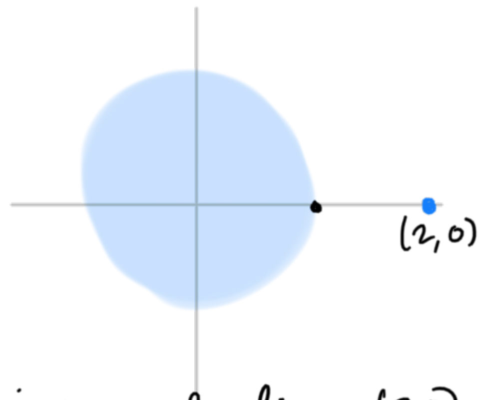
$A = (0,1) \times (0,1)$ | $A = [0,1] \times [0,1]$ | $A = (0,1) \times [0,1]$







Eks $A = B(0,1) \cup \{(2,0)\}$



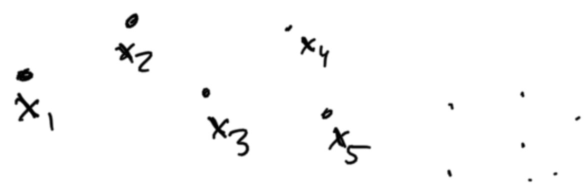
A er ikke åpen, fordi $(2,0) \in A$ er et randpunkt.

A er ikke lukket, fordi $(0,1)$ er et randpunkt $\notin A$.

Følger i $\mathbb{R}^m$

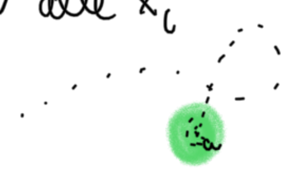
En følge i $\mathbb{R}^m$ er en sekvens $x_1, x_2, x_3, \ldots$ av punkter i $\mathbb{R}^m$.

Betegnes $\{x_i\}$ eller $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.



tillater også at følgen starter på andre verdier. F.eks $x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$

Defn Følgen $\{x_i\}$ konvergerer til $a \in \mathbb{R}^m$ dersom enhver kule $B(a,r)$ inneholder alle x_i for store i.



Formelt: For enhver $\varepsilon > 0$, finnes en $N > 0$ s.a $|x_i - a| < \varepsilon$ for alle $i \geq N$.

Skriver
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = a.$$

De vanlige regnereglene for følger gjelder også i $\mathbb{R}^m$:

$\{\mathbf{x}_n\}$ konvergerer mot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$
$\{\mathbf{y}_n\}$ konvergerer mot $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$

- $\{\mathbf{x}_n \pm \mathbf{y}_n\}$ konvergerer mot $\mathbf{x} \pm \mathbf{y}$
- $\{\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n\}$ konvergerer mot $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$
- $\{c\mathbf{x}_n\}$ konvergerer mot $c \cdot \mathbf{x}$ for alle $c \in \mathbb{R}$

Komponentene til en følge

La $\{\mathbf{x}_n\}$ være en følge i $\mathbb{R}^m$ med komponenter
$$\mathbf{x}_n = (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$$

Setning 6.5.1 La $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Da gjelder
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \iff \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$$
for alle $i = 1 \ldots m$.

$\therefore$ $\{\mathbf{x}_m\}$ konvergerer hvis og bare hvis hver komponent konvergerer.

<u>Eks</u> $\mathbf{x}_n = \left(\frac{\cos n}{n}, \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$

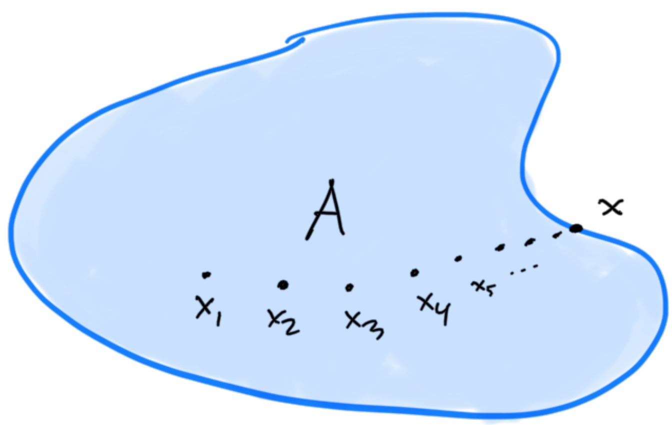
Holder å sjekke hver komponent:

- $\lim_{n \to \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ (da $|\cos n| \leq 1$)
- $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \overset{L'H}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0$
- $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$

$\leadsto$ $\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = (0, 0, 1)$

Lukkede mengder og følger

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$ være en mengde.



A er lukket $\iff$ Enhver konvergent følge $\mathbf{x}_n$ av punkter i A har grense $\mathbf{x} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n$ i A

Bevis "$\Rightarrow$": Anta x_n konvergerer mot x og at $x \notin A$.

$\leadsto$ Da kan ikke x være et indre punkt eller et randpunkt (fordi $\partial A \subseteq A$ pr. antagelse).

$\leadsto$ x er et ytre punkt.

$\leadsto$ Det finnes en kule $B(x,r)$ s.a $B(x,r) \subseteq A^c$

Men $B(x,r)$ kan ikke inneholde noen x_i'er $(x_i \in A)$

$\Rightarrow$ $\{x_i\}$ konvergerer ikke mot x $\Rightarrow$ motsigelse.

$\Rightarrow$ $x \in A$.

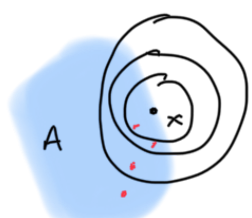
"$\Leftarrow$": La $x \in \mathbb{R}^m$ være et randpunkt $\leadsto$ skal vise $x \in A$.

Se på kulene $B(x, \frac{1}{n})$ for $n = 1, 2, \dots$

x randpunkt $\Longrightarrow$ $B(x, \frac{1}{n})$ inneholder punkter i både A og A^c.

For hver n, velg en random $x_i \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$

$\leadsto$ får en følge $\{x_n\}$ som må konvergere mot x, da $|x_n - x| < \frac{1}{n}$ for alle n.



Antagelsen vår sier at $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ er med i A.

Kontinuitet og følger

$\mathbb{F}: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ er funksjon i N variable.

Setning La $a \in A$. Da gjelder

$\mathbb{F}$ er kontinuerlig i a $\iff$ $\mathbb{F}(x_n) \longrightarrow \mathbb{F}(a)$ for alle følger x_n s.a. $x_n \longrightarrow a$.

"$\mathbb{F}$ tar konvergente følger på konvergente følger"

Bevis

"$\Rightarrow$":

Gitt x_n med $x_n \to a$. Skal vise at $\mathbb{F}(x_n) \to \mathbb{F}(a)$.

Med andre ord:
(*) for alle $\varepsilon > 0$, skal det finnes en $N > 0$
s.a $|\mathbb{F}(x_n) - \mathbb{F}(a)| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

La $\varepsilon > 0$ være gitt.

$\mathbb{F}$ kontinuerlig i a $\Rightarrow$ det finnes en $\delta > 0$ s.a
$|\mathbb{F}(y) - \mathbb{F}(a)| < \varepsilon$ ⓐ
for alle $|y - a| < \delta$.

Da $x_n \to a$, finnes det en N s.a $|x_n - a| < \delta$ for alle $n \geq N$. ⓑ

ⓐ + ⓑ $\rightsquigarrow$ for alle $n \geq N$ så er $|x_n - a| < \delta$
og følgelig $|\mathbb{F}(x_n) - \mathbb{F}(a)| < \varepsilon$

$\rightsquigarrow$ (*) er oppfylt.

"$\Leftarrow$"

Anta nå at F ikke er kontinuerlig i a (for motsigelse).
Må vise at det finnes minst én følge x_n s.a

$x_n \to a$, men $F(x_n) \not\to F(a)$.

F ikke kontinuerlig $\Rightarrow$ det finnes en $\varepsilon > 0$ s.a
for alle $\delta > 0$ har vi
$|x-a| < \delta$ men $|F(x) - F(a)| \geq \varepsilon$

Velg $\delta = \frac{1}{n}$.

$\rightsquigarrow$ Finner en $x_n \in A$ s.a $|x_n - a| < \frac{1}{n}$
men $|F(x_n) - F(a)| \geq \varepsilon$

$\rightsquigarrow$ Følgen $\{x_n\}$ konverger mot a,
men $\{F(x_n)\}$ konverger ikke mot $F(a)$
(fordi $|F(x_n) - F(a)| \geq \varepsilon$)

$\rightsquigarrow$ beviset er ferdig!