1) a) $D = \{ (x,y) : 0 \le x \le R ,\ 0 \le y \le \pi \}$

$$\iint_D x^2 e^{-x^3} \sin y \, dx\, dy$$

$$= \int_0^R \left[\int_0^{\pi} x^2 e^{-x^3} \sin y \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^R \left[-x^2 e^{-x^3} \cos y \right]_0^{\pi} dx$$

$$= \int_0^R 2x^2 \underbrace{e^{-x^3}}\, dx$$

$u = -x^3 \qquad du = -3x^2 dx$

$2x^2 dx = -\frac{2}{3} du$

$$= \int_0^{-R^3} -\frac{2}{3} e^u \, du = -\frac{2}{3} \left[e^u \right]_0^{-R^3}$$

$$= -\frac{2}{3} \left(e^{-R^3} - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left(1 - e^{-R^3} \right)$$

b) $K_R = \{ (x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R$

$$I_{K_R} = \iiint_{K_R} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dx\, dy\, dz$$

Kulekoordinater:

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} e^{-(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \right] d\phi \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[\underbrace{\int_0^{\pi} \Big[\int_0^{R} e^{-\rho^3} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \Big] d\phi}_{\text{fra a : } \frac{2}{3}(1-e^{-R^3})} \Big] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(1-e^{-R^3}) \, d\theta$$

$$= \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}(1-e^{-R^3})}}$$

2 $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 24x - 10y + 61$

a) Stasjonære punkter:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8x - 24 \\ 2y - 10 \end{pmatrix}$$

Denne er $\vec{0}$ kun når $x=3$ og $y=5$.

Derfor er $(3,5)$ eneste stasjonære punkt.

$$f(3,5) = 36 + 25 - 72 - 50 + 61 = 0$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Begge egenverdiene er større enn 0, og da er $(3,5)$ et lokalt min.

b)

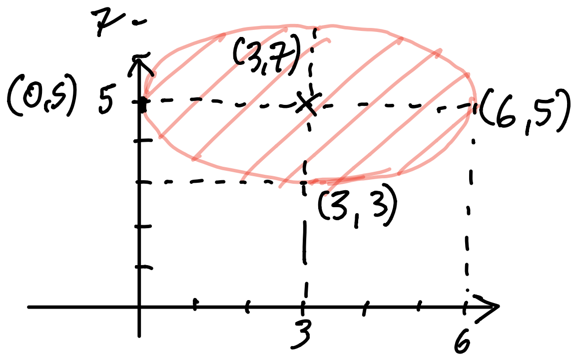
$$4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225 = 0$$

$$4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 10y + 25) = -225 + 36 + 225$$

$$4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 36$$

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y-5)^2}{2^2} = 36$$

Dette er en ellipse med sentrum $(3,5)$, med store halvakse $a=3$, lille halvakse $b=2$.



f er kontinuerlig, og D (skravert over) er lukket og begrenset. Da vet vi at f har globalt min. og maks. på D.

c) Sett $g(x,y) = 4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225 = 0$

$g(x,y) = 0$ beskriver ellipsen.

Kandidater for maks/min på ellipsen kan vi finne med Lagranges metode:

Vi har at $\nabla g = \begin{pmatrix} 8x - 24 \\ 18y - 90 \end{pmatrix}$, som er $\vec{0}$

kun når $x = 3$, og $y = 5$. Men $(3,5)$ er senteret i ellipsen, og dette ligger ikke på ellipsen.

Derfor: Ingen kandidater fra $\nabla g = \vec{0}$.

$\nabla f = \lambda \nabla g$: $\begin{pmatrix} 8x - 24 \\ 2y - 10 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8x - 24 \\ 18y - 90 \end{pmatrix}$

Vi kan anta $(x,y) \neq (3,5)$, slik at en av

$8x-24$ og $2y-10$ er forskjellig fra 0.

$8x-24 \neq 0$: $\quad 8x-24 = \lambda(8x-24)$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = 1$$

andre ligning gir da

$$2y-10 = 18y-90 = 9(2y-10)$$

Derfor må $2y-10=0$, slik at $y=5$

Ser fra figuren at $(0,5)$ og $(6,5)$ er de eneste punktene på ellipsen der $y=5$.

$2y-10 \neq 0$: $\quad 2y-10 = \lambda(18y-90) = 9\lambda(2y-10)$

$1 = 9\lambda$, slik at $\lambda = \frac{1}{9}$.

første ligning gir da:

$$8x-24 = \frac{1}{9}(8x-24)$$

Derfor må $8x-24=0$, slik at $x=3$.

Ser fra figuren at $(3,3)$ og $(3,7)$ er de eneste punktene på ellipsen der $x=3$.

4 kandidater fra Lagrange (dvs. på ellipsen)

$f(0,5) = 25 - 50 + 61 = \underline{36}$

$f(6,5) = \cdots = \underline{36}$

$f(3,3) = \cdots = \underline{4}$

$f(3,7) = \cdots = \underline{4}$

Kandidater fra det indre av ellipsen: stasjonære punkter, det vil si $(3,5)$

$f(3,5) = \underline{0}$

Vi ser at $\underline{(3,5)}$ er globalt min for f, $\underline{(0,5)}$ og $\underline{(6,5)}$ er globale maks. for f

Oppgave 3

a) $A = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 6/10 & 2/10 \end{pmatrix}$

Egenverdier:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \tfrac{3}{10})(\lambda - \tfrac{2}{10}) - \tfrac{6}{100}$$

$$= \lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda = \lambda(\lambda - \tfrac{1}{2})$$

Ser at $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

Egenvektor for $\lambda_1 = 0$:

$$0 \cdot I - A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{6}{10} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

egenvektor må oppfylle $3x_1 + x_2 = 0$, slik at $x_2 = -3x_1$

Setter vi $x_1 = 1$ får vi $x_2 = -3$, og

egenvektoren $\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$

Egenvektor for $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} I - A = \begin{pmatrix} 2/10 & -\frac{1}{10} \\ -6/10 & 3/10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

egenvektor må oppfylle $2x_1 - x_2 = 0$, slik at $x_2 = 2x_1$.

Setter vi $x_1 = 1$ får vi $\underline{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

b) Vi uttrykker $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ ved hjelp av $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{x}_0 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 5 & 40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Derfor er $\vec{x}_0 = 5\vec{v}_1 + 8\vec{v}_2$

$$\vec{x}_n = A^n \vec{x}_0 = A^n (5\vec{v}_1 + 8\vec{v}_2)$$
$$= 5 \cdot A^n \vec{v}_1 + 8 \cdot A^n \vec{v}_2$$

$$= 5 \cdot 0^n \vec{v}_1 + 8 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \vec{v}_2$$

$$\to 0 \text{ når } n \to \infty.$$

c) $$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y \\ \frac{6}{10}x + \frac{2}{10}y \end{pmatrix} \begin{matrix} \} F_1 \\ \} F_2 \end{matrix}$$

$$\nabla F_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \qquad |\nabla F_1|^2 = \left(\tfrac{3}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10}$$

$$\nabla F_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix} \qquad |\nabla F_2|^2 = \left(\tfrac{6}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{10}\right)^2 = \frac{4}{10}$$

$$\sqrt{|\nabla F_1|^2 + |\nabla F_2|^2} = \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{4}{10}} = \sqrt{\frac{5}{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Derfor er $\vec{F}$ en kontraksjon.