Eksamen 2019

1 a) $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

Egenverdier: Vi må løse $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \frac{2}{5}\right)\left(\lambda - \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= \lambda^2 - \frac{3}{5}\lambda + \frac{2}{25} - \frac{12}{25}$$

$$= \lambda^2 - \frac{3}{5}\lambda - \frac{2}{5} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = \frac{\frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{8}{5}}}{2} = \frac{\frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{49}{25}}}{2} = \frac{\frac{3}{5} \pm \frac{7}{5}}{2}$$

$$= \frac{3}{10} \pm \frac{7}{10}$$

$$\lambda_1 = -\frac{2}{5}, \quad \lambda_2 = 1$$

Egenvektor(er) for $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$:

$$-\frac{2}{5}I - A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En egenvektor må oppfylle: $4x_1 + 3x_2 = 0$, så $x_2 = -\frac{4}{3}x_1$

setter vi $x_1 = 3$ får vi egenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Egenvektor(er) for $\lambda_2 = 1$:

$$I - A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En egenvektor må da oppfylle $x_1 - x_2 = 0$, så $x_1 = x_2$

setter vi $x_1 = 1$ får vi egenvektoren $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) For å skrive $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer må vi radredusere

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ -4 & 1 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{x}_0 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Vi har nå at $\vec{x}_0 = -3\vec{v}_1 + 12\vec{v}_2$

$$= -3\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} A^n \vec{x}_0 = \lim_{n\to\infty} A^n\left(\begin{pmatrix}-9\\12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}\right)$$

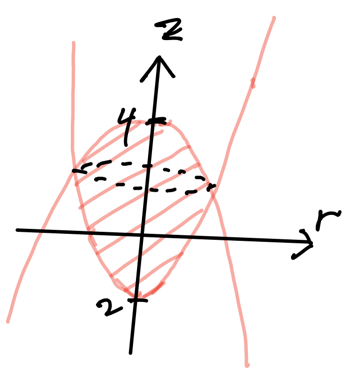
$$= \lim_{n\to\infty} A^n\begin{pmatrix}-9\\12\end{pmatrix} + \lim_{n\to\infty} A^n\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n\begin{pmatrix}-9\\12\end{pmatrix} + \lim_{n\to\infty} 1^n\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}}}$$

2 a) Volumet avgrenset av $z = 4 - x^2 - y^2$ [redacted] $-r^2$

$z = 2 + x^2 + y^2 = 2 + r^2$



Skjæring: $4 - r^2 = 2 + r^2 \Leftrightarrow 2r^2 = 2 \Rightarrow r = 1$

Skjæring er sirkelen med radius 1.

Vi må integrere over sirkelen $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

På D er det $4 - r^2$ som ligger øverst

(evt. sett inn $r = 0$ for å se dette)

Høyden på det avgrensede området blir derfor

$$(4-r^2)-(2+r^2) = 2-2r^2.$$

$$V = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (2-2r^2)r\,dr\right]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[r^2-\frac{1}{2}r^4\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\theta = \underline{\underline{\pi}}$$

b) $\int_C \left(x-\frac{1}{3}x^3-xy^2\right)dy$, C enhetssirkelen (mot klokka)

$$= \int_C P\,dx + Q\,dy$$

Her er $P(x,y)=0$, $Q(x,y) = x-\frac{1}{3}x^3-xy^2$

Greens teorem: $\int_C P\,dx+Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

$$= \iint_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (1-r^2)r\,dr\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (2-2r^2)r\,dr\right]d\theta = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Greit også å vise direkte: C parametisert ved $(\underbrace{\cos t}_{x}, \underbrace{\sin t}_{y})$

$$\int_C \left(x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2\right) dy$$

$$y = \sin t \quad \Downarrow \quad dy = \cos t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t \sin^2 t\right) \cos t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\cos^2 t - \sin^2 t\right) \cos^2 t \, dt$$

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\cos 2t + 1)^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 2t + 2\cos 2t + 1\right) dt$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (\cos^2 2t + 1) \, dt$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}(\cos 4t + 1) + 1\right) dt$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + 1\right) dt = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2}$$

3 a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 20 & 1 \\ 4 & 3 & 18 & 1 \\ 2 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{II-4I \\ III-4I \\ IV-2I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{II \Leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{III+II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{IV-III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Søyle 1, 2, og 4 er pivotsøyler, og da er de lineært uavhengige.

b) For å lage basis for $\mathbb{R}^4$ som inneholder disse tre søylene:
Sett inn noe for tredje søyle i red. trappe form:

satt inn, er nå lin. uavh.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{I+II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{IV+III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{IV}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{II}+4\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+4\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}+2\mathrm{I} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utvider vi søyle 1,3, og 4 fra A med denne, får vi en basis for $\mathbb{R}^4$.

Oppgave 5

a) $f(x,y) = x^2 e^x + (3y^2 - 6y)e^x + 1$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xe^x + x^2e^x + (3y^2-6y)e^x \\ (6y-6)e^x \end{pmatrix}$$

$\nabla f = \vec{0}$ medfører at $y = 1$ (fra ligning 2)

Likning 1 sier da at $(2x + x^2 + 3y^2 - 6y)e^x = 0$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = -1 \pm 2$$

Derfor er $x=1$ eller $x=-3$

De eneste stasjonære punktene er da $(1,1), (-3,1)$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+2x+2x+x^2+3y^2-6y)e^x$

$$= (x^2+4x+3y^2-6y+2)e^x$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2+4x+3y^2-6y+2)e^x & (6y-6)e^x \\ (6y-6)e^x & 6e^x \end{pmatrix}$$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} (1+4+3-6+2)e & 0 \\ 0 & 6e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & 6e \end{pmatrix}$$

$$Hf(-3,1) = \begin{pmatrix} (9-12+3-6+2)e^{-3} & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{-3} & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til $Hf(1,1)$ er begge positive, slik at $(1,1)$ er lokalt min.

Egenverdiene til $Hf(-3,1)$ er en negativ og en positiv, slik at $(-3,1)$ er et sadelpunkt

c) $g(x,y) = 2x + y - 3 = 0 \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Siden $\nabla g \neq \vec{0}$ alltid, så får vi ingen kandidater fra $\nabla \vec{g} = \vec{0}$.

Vi ser på når $\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$(x^2 + 2x + 3y^2 - 6y)e^x = \lambda \cdot 2$$
$$6(y-1)e^x = \lambda \cdot 1$$

Eliminer λ:

$$x^2 + 2x + 3y^2 - 6y = 12(y-1)$$

Dette kan skrives

$$x^2 + 2x + 3y^2 - 18y = -12$$

Fullfør kvadratene:

$$x^2 + 2x + 1 + 3(y^2 - 6y + 9) = -12 + 1 + 27$$
$$(x+1)^2 + 3(y-3)^2 = 16$$
$$\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{(4/\sqrt{3})^2} = 1$$

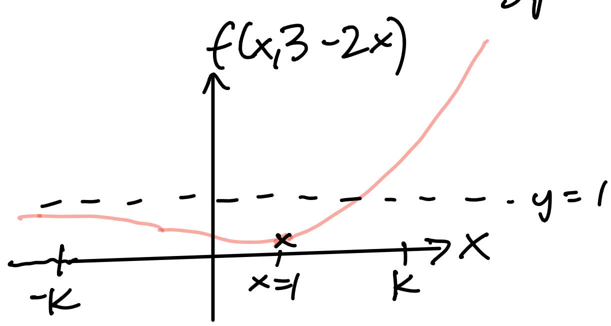
Derfor: Lokale ekstremalpunkter ligger på skjæringen mellom den gitte ellipsen og linjen $y = 3 - 2x$.

Hjørnet: $f(1,1) = e + (3-6)e + 1 = 1-2e < 1$

$\lim_{x\to\infty} f(x, 3-2x)$:

når $x \to \infty$ vil $x^2 e^x \to \infty$, og $y = 3-2x \to -\infty$,
men da vil $(3y^2-6y)e^x \to \infty$,
derfor blir $\lim_{x\to\infty} f(x, 3-2x) = \infty$.

$\lim_{x\to -\infty} f(x, 3-2x) = 0$ siden $e^x \to 0$ når $x \to -\infty$, fortere enn hva x^2 og $3y^2-6y$ gjør.



Vi kan ikke ha noe globalt maksimum under betingelsen, siden $\lim_{x\to\infty} f(x, 3-2x) = \infty$.

Vi må ha et globalt minimum siden vi kan begrense problemet til et intervall $[-K, K]$, der f tar verdier som er nær 1 for små x på dette intervallet.