1) $\vec{r}(t) = (t^3, e^{-2t})$

$\vec{r}''(t) = \vec{a}(t) = (6t, 4e^{-2t})$

$\vec{a}(1) = (6, 4e^{-2})$

E er riktig.

2) $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+3 \\ xy+2 \end{pmatrix}$

$\vec{F}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ $\vec{F}'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{F}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{F}'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

B er riktig

3. B er riktig: Dette er eneste vektor med lik første og tredje komponent. (vektorene vi startet med hadde disse som like komponenter).

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 16 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots$

Vi har to pivotsøyler. D er riktig. (Matrisen er ikke inverterbar).

5. $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-7 & 2 \\ -4 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-7)(\lambda-1)+8$

$= \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$

$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = 4 \pm 1.$

$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5.$

D er riktig.

6. $\vec{F}(x,y,z) = (\underbrace{yz\cos(xy)}_{\frac{\partial\phi}{\partial x}},\ \underbrace{xz\cos(xy)}_{\frac{\partial\phi}{\partial y}},\ \underbrace{\sin(xy)}_{\frac{\partial\phi}{\partial z}})$

$\phi(x,y,z) = z\sin(xy) + C(y,z)$
$\phi(x,y,z) = z\sin(xy) + D(x,z)$
$\phi(x,y,z) = z\sin(xy) + E(x,y)$

Ser at vi kan velge $C = D = E = 0$, og får

$\phi(x,y,z) = z\sin(xy)$ som en potensialfunksjon.

C er riktig

$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + C(y,z)$
$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}y^2 + D(x,z)$
$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2 + E(x,y)$
$C = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$, osv.

7. $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

$\vec{F}$ er konservativt med potensialfunksjon

$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$

Derfor: $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$

$\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$
$\vec{r}(0) = (0,0,0)$
$\vec{r}(1) = (1,1,1)$

$= \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0)$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 - 0 - 0$
$= \frac{3}{2}$

D er riktig

8. D er riktig

9. $4x^2 + y^2 + 24x - 4y + 24 = 0$

$$4(x^2+6x+9) + y^2 - 4y + 4 = -24 + 36 + 4 = 16$$

$$4(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

$$\frac{(x+3)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1$$

Ellipse med sentrum $(-3,2)$, halvakser 2 og 4.

A er riktig

10. D er riktig: Dette er en triangulær matrise, og der står 1 på diagonalen, som da er en egenverdi.

11. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ser at en egenvektor må ha like verdier i alle komponentene.

C er riktig

12. $R = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$0 \leq r \leq 1$ i polarkoordinater.
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r^2 \cdot r\,dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\,d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

C er riktig

13. $$\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2) e^{-(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^n r^2 e^{-(r^2)^2} r\,dr \right] d\theta$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^n r^3 e^{-r^4} dr \right] d\theta$$

$u = -r^4 \qquad du = -4r^3 dr$

$r^3 dr = -\frac{1}{4} du$

$$\int r^3 e^{-r^4} dr = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4} e^u$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-r^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{4} e^{-r^4} \right]_0^n d\theta$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(1 - e^{-n^4})\,d\theta$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \cdot \frac{1}{4}(1-e^{-n^4}) = \frac{\pi}{2}$$

C er riktig.

14. $\iiint_R xy^2\,dx\,dy\,dz$

$= \int_0^2 \left[\int_0^2 \left[\int_0^2 xy^2\,dz \right] dy \right] dx$

$= \int_0^2 \left[\int_0^2 \left[xy^2 z \right]_0^2 dy \right] dx$

$= \int_0^2 \left[\int_0^2 2xy^2\,dy \right] dx$

$= \int_0^2 \left[\frac{2}{3} xy^3 \right]_0^2 dx$

$= \int_0^2 \frac{16}{3} x\,dx = \left[\frac{8}{3} x^2 \right]_0^2 = \frac{8 \cdot 4}{3} = \frac{32}{3}$

A er riktig

15. $\vec{F}(x,y) = \left(y + \sin(x^2), -(5x + \cos(y^2)) \right)$

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -5 - 1 = -6$

$\int_C P\,dx + Q\,dy \overset{\text{Greens}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$

$$= (-6) \iint_D 1 \cdot dx\,dy = -6 \cdot \pi \cdot 1^2 = -6\pi$$

E er riktig