EKSAMENSVERKSTED MAT1110

Brage Brevig

Mai 2020

Avstander i rommet

La $\mathbf{v} = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ være et generelt punkt i rommet. Finn den minste euklidiske avstanden fra punktet til et punkt $\mathbf{u} = (x, y, z)$ på enhetskulen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Med euklidisk avstand menes her $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Finn punktene på enhetskulen som ligger nærmest punktet $(0, 0, 2)$ og $(3, 2, 4)$.

Hint: Her må du minimere avstanden fra $\mathbf{v}$ *til et punkt* $\mathbf{u}$ *med betingelsen om at punktet* $\mathbf{u}$ *ligger <u>på</u> enhetskulen.*

Løsning:

Avstanden mellom punktet $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$ gis som

$$v(x, y, z) = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2} \tag{1}$$

Som hintet sier skal vi her minimere den euklidiske avstanden mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$, altså skal vi minimere objektet $v(x, y, z)$ med betingelsen $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Vi bruker Lagrange-multiplikatoren λ for å bestemme

$\nabla v = \lambda \nabla u$. Dette gir oss ligningssettet

$$\begin{cases} v_x = \lambda g_x \\ v_y = \lambda g_y \\ v_z = \lambda g_z \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Vi har nå fire ligninger med fire ukjente x, y, z og λ, så ligningssystemet kan løses. For å forenkle algebraen vil det også være nyttig å gjenkjenne her at dersom vi minimerer kvadratet av $v(x, y, z)$ minimerer vi også $v(x, y, z)$ siden $v(x, y, z)$ er en ikke-negativ, reell funksjon. Er du usikker på om dette stemmer burde du sjekke det! Vi får

$$\begin{cases} 2(x-p) = 2\lambda x \\ 2(y-q) = 2\lambda y \\ 2(z-r) = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Løser vi for x, y og z ser vi at

$$\begin{cases} x = p/(1-\lambda) \\ y = q/(1-\lambda) \\ z = r/(1-\lambda) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Setter vi inn for x, y og z i betingelsesfunksjonen $g(x, y, z)$ ser vi at

$$p^2 + q^2 + r^2 - (1 - \lambda)^2 = 0$$

For å bestemme λ kan man gå den lange veien om kvadrat-formelen (ABC-formelen), eller så kan man gjenkjenne at $p^2 + q^2 + r^2 = \theta^2$ bare er et tall, og at vi da kan la $\lambda = 1 \pm \theta$. Her er det viktig å få med $\pm$ siden vi kvadrerer tallet. Setter vi inn for λ i punktene x, y og z får vi

$$\begin{cases} x = p/(1 - (1 \pm \theta)) = \pm p/\theta = \pm p/\sqrt{p^2 + q^2 + z^2} \\ y = q/(1 - (1 \pm \theta)) = \pm q/\theta = \pm q/\sqrt{p^2 + q^2 + z^2} \\ z = r/(1 - (1 \pm \theta)) = \pm r/\theta = \pm r/\sqrt{p^2 + q^2 + z^2} \end{cases} \tag{5}$$

Legg merke til her at hvert punkt x, y og z får to verdier. Dette er ikke til å unngå når man bruker Lagrange-multiplikatorer. Disse tilsvarer punktene som ligger nærmest og lengst fra et generelt punkt (p, q, r).
For å finne punktene som ligger nærmest $(0, 0, 2)$ og $(3, 2, 4)$ setter vi inn i (5). Punktet som ligger nærmest $(0, 0, 2)$ er $(0, 0, 1)$, og punktet som ligger nærmest $(3, 2, 4)$ er $(3/\sqrt{29}, 2/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29})$

Bar E. Tull AS.

Fabrikkeieren Bar E. Tull ønsker å maksimere produksjonen sin. Han er dessverre ikke så kjent med flervariabel analyse og trenger hjelp. Cobbs-Douglas - funksjonen beskriver den totale produksjonen ved

$$Y(K, L) = AK^\alpha L^\beta$$

hvor A beskriver produksjonseffektivitenen uttrykt som en prosent, K beskriver den tilgjengelige kapitalen (maskineri, arbeidsrom, etc.), og L beskriver antall timer jobbet per ansatt per år. Konstantene α og β beskriver elastisiteter. Eksempelvis, dersom $\alpha = 0.5$ vil en fordobling av kapitalen øke produksjonen med 50%.

Maksimér

$$Y(K, L) = KL$$

under betingelsene

$$K = \frac{5}{4}L$$

og

$$K + L = 150$$

Løsning:

Her har jeg i ettertid skjønt at betingelsene jeg har brukt byr på en del komplisert regning, så bare å komme frem løsningen på ligningssettet krever sitt. Jeg har brukt MATLAB for å løse dette, og jeg kan med sikkerhet si at en faktisk eksamensoppgave ville brukt mer gjennomtenkte betingelser. Vi skal likevel se på *hvordan* vi løser denne oppgaven. Som i oppgaven over bruker vi Lagrange-multiplikatorer. For å optimalisere en objektfunksjon under flere betingelser kan det være greit å introdusere hjelpefunksjonen

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda_1, \lambda_2) = Y(K, L) - \sum_{n=1}^{2} \lambda_n g_n$$

og vi må kreve at

$$\nabla \mathcal{L} = 0$$

Beregner vi gradienten av hjelpefunksjonen får vi ligningssettet

$$\begin{cases} L - (\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \\ K - \lambda_1 + (5/4)\lambda_2 = 0 \\ K + L - 150 = 0 \\ K - (5/4)L = 0 \end{cases}$$

Bruker vi de to første ligningene i systemet ser vi at vi må ha

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - (1/4)\lambda_2 = 150 \\ -(1/4)\lambda_1 - (10/4)\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Legg merke til at dette er en matriseligning på formen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1/4 \\ -1/4 & -10/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Løsningen kan vi da finne ved å radredusere den utvidede matrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1/4 & 150 \\ -1/4 & -10/4 & 0 \end{array}\right)$$

I MATLAB gir dette $\lambda_1 = 74.0741$ og $\lambda_2 = -7.4074$. Som sagt ville jeg i retrospekt kanskje lagt ved denne informasjonen for å gjøre oppgaven lettere å løse. Nå som vi kjenner Lagrange-multiplikatorene kan vi finne verdier av K og L som tilfredstiller $\nabla Y(K, L) = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$. Vi bruker igjen ligningssystemet og finner at $K = 83.3334$ og $L = 66.6667$. Dette gir oss koordinatene til den maksimale produksjonen $Y(K, L)$ under betingelsene g_1

og g_2, og dermed er den maksimale produksjonen

$$Y_{max} = KL = 5555.56$$

Gauss - integraler

Vi betrakter Gauss - integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

Dette er et eksempel på et uegentilig integral, og har ingen "rett-frem" løsning med vanlige integralmetoder. Det er jo litt synd, da dette er et integral dere kommer til å se gang på gang fremover. Det har en sentral rolle i statistikk, statistisk mekanikk og kvantemekanikk.

Bruk integralidentiteten

$$\left(\int_a^b f(x) \, dx \right)^2 = \int_a^b f(x) \, dx \int_a^b f(y) \, dy = \int_a^b \int_a^b f(x) f(y) \, dx dy$$

for å bestemme verdien av Gauss-integralet.

Hint: du må etterhvert bruke polarkoordinater. Glem ikke Jacobi-determinanten!

Løsning: Bruker vi integralidentiteten må vi ha

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} \, dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy$$

Bruker vi nå polarkoordinater har vi

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} \, dr d\theta$$

Vi kan nå utføre substitusjonen $u = r^2$ slik at $du/dr = 2r \rightarrow dr = du/2r$.

Integrasjonsgrensene endrer seg ikke. Vi får da at

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx\right)^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-u}\ dud\theta = \pi\left[-e^{-u}\right]\Big|_0^{\infty}$$

hvor vi får faktoren π ettersom integralet er uavhengig av θ. Vi har at $-e^{-u} \to 0$ når $u \to \infty$, og $-e^0 = -1$. Dermed ser vi at

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx\right)^2 = \pi\left(0-(-1)\right) = \pi \implies \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}$$

Lineær avbildning og linearisering

Vi betrakter den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler alle punkter i planet om $y = -x$.

a) Finn en 2×2-matrise A slik at $T(x, y) = A\mathbf{x}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Løsning:

I alle slike oppgaver vil det være lurt å se for seg hva som skjer med enhetsvektorene $\vec{e}_1 = (1, 0)$ og $\vec{e}_2 = (0, 1)$. I vårt tilfelle vil enhetsvektoren i x-retning speiles ned på enhetsvektoren i $-y$-retning. Likedan vil enhetsvektoren i y-retning speiles ned på enhetsvektoren i $-x$-retningen. Altså,

$$T(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og

$$T(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi må da ha at

$$A = (T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Finn egenverdiene λ til A med tilhørende egenvektorer.

Løsning:

Vi ser etter egenverdier på vanlig vis ved å bestemme λ slik at $\det(A - \lambda I) =$

0. Vi har da

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

som klart har løsningen $\lambda = \pm 1$.

Når det kommer til egenvektorer kan det i "enkle" oppgaver som denne være greit å tenke på de enkleste vektorene som $(1, 0), (0, 1), (1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ og $(-1, 1)$. Her er det klart at $(1, 1)$ er en egenvektor med egenverdi $\lambda = 1$ og at $(-1, -1)$ er en egenvektor med $\lambda = 1$. Altså er det vektorene som skjærer ortogonalt på speillinjen $y = -x$ som utspenner det man kaller egenrommet til matrisen A. Alle vektorer på disse to linjene vil bare skaleres når matrisen A opererer på dem.

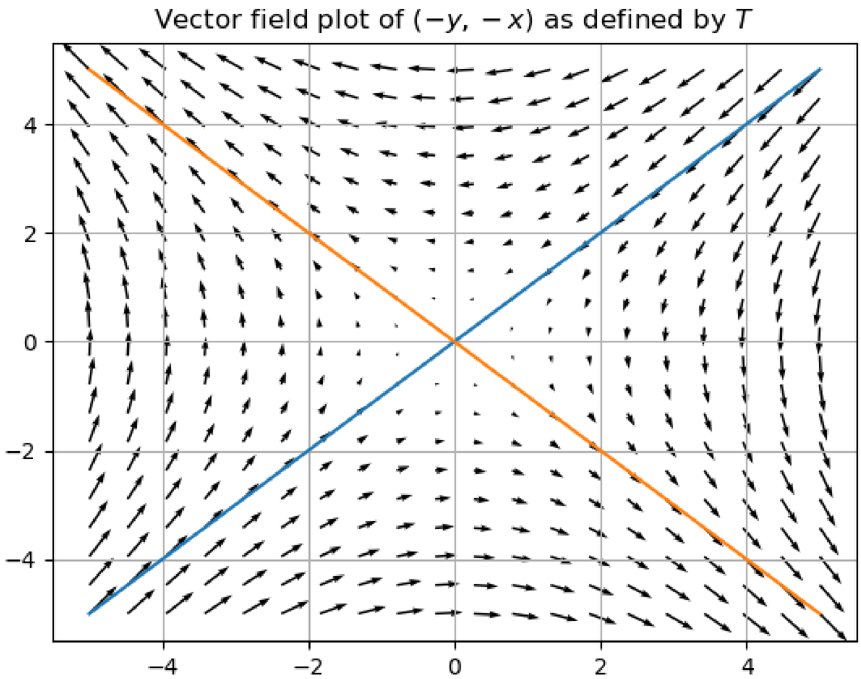

Figure 1: Vektorplot av matrisen som speiler alle vektorer om $y = -x$. Noen av vektorpilene avviker litt fra linjene, men dette har med oppløsningen jeg brukte i programmet å gjøre.

c) La $\Omega = [-5,5] \times [-5,5]$ og $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ være vektorfeltet definert ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (x-1)^2 - y^2 + 1 \\ (y-1)^2 - x^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Bestem lineariseringen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ til vektorfeltet i punktet $\mathbf{a} = (1,1)$.

Løsning:

Vi lineariserer et vektorfelt ved å bestemme

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \nabla\mathbf{F}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Legg merke til at dette har en éndimensjonal analogi i Taylor-utvikling som dere lærte første semester. Poenget med linearisering av vektorfelt er å tilnærme et ikke-lineært system som et lineært system rundt et punkt vi er interessert i. Vi har at

$$\nabla\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x-1 & -y \\ -x & y-1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Videre har vi at $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = (0,0)$. Lineariseringen av $\mathbf{F}$ i punktet $\mathbf{a} = (1,1)$ er dermed

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Det vi ser på plottet er at rundt (1,1) (det røde punktet) oppfører begge vektorfeltene seg veldig likt. I det fullstendig lineære bildet peker alle vektorene inn mot punktet, men i det ikke-lineære vektorfeltet peker de kun mot (1,1) rett rundt punktet. Det kan være litt vanskelig å se på akkurat dette strømningsplottet, men se også på figuren under.

d) Bestem om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definerer en kontraksjon eller ikke.

Løsning:

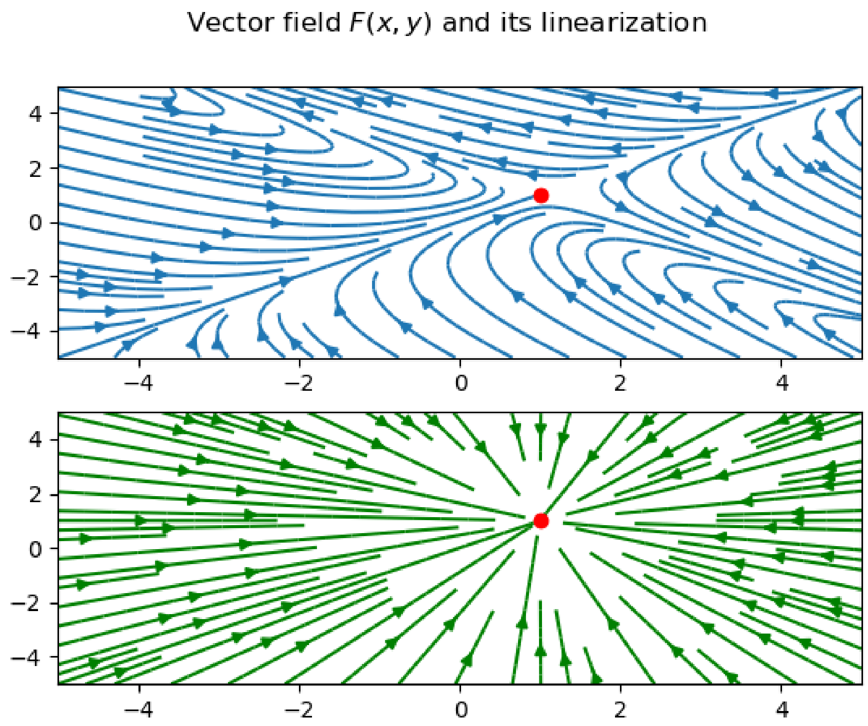

Figure 2: Strømningsplot av vektorfeltet $F(x, y)$ (øverst) og lineariseringen i $\mathbf{a} = (1, 1)$ (nederst).

Her har jeg skrevet feil i oppgaven. Spørsmålet er om $\mathbf{F} : \Omega \to \Omega$ definerer en kontraksjon eller ikke. Det jeg ville oppnå med denne oppgaven var at dere selv skulle stille spørsmålet om vektorfeltet faktisk definerer en funksjon som avbildes inn i seg selv i første omgang, for det gjør den nemlig ikke, og kan derfor ikke være en kontraksjon heller. Vi sjekker at $(u, v) = \mathbf{F}(x, y) \in \Omega\ \forall (x, y) \in \Omega$ slik at

$$|u| = \frac{1}{2}|(x-1)^2 - y^2 + 1| \leq \frac{1}{2}(|x^2| + |2x| + 1 + |y^2| + 1) \leq 31 > 5$$

$$|v| = \frac{1}{2}|(y-1)^2 - x^2 + 1| \leq 31 > 5$$

Som vi ser ligger *ikke* verdiene av $F(x, y)$ i definisjonsmengden Ω og avbild-

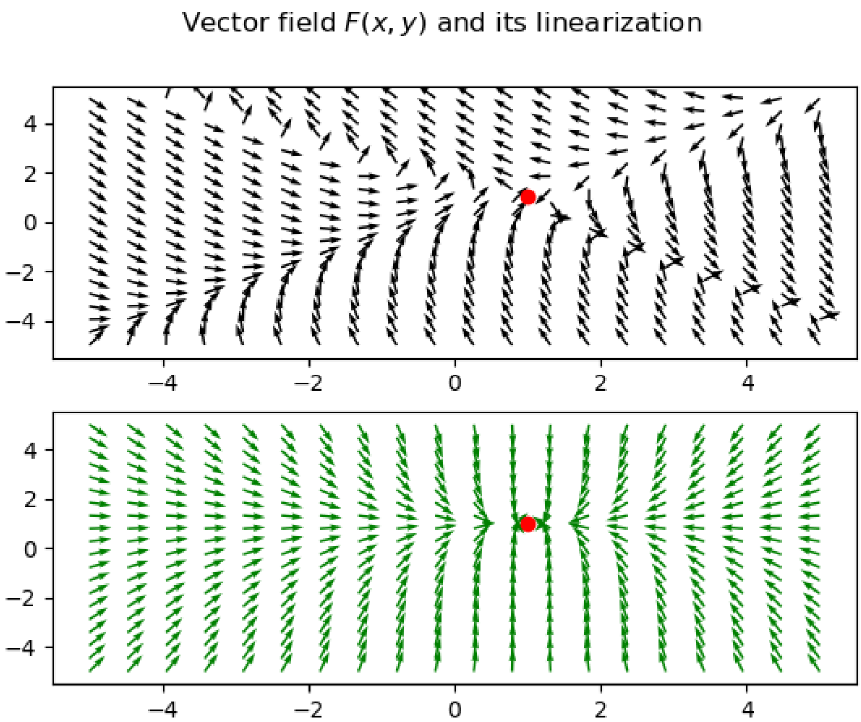

Figure 3: Vektorplot av vektorfeltet og av lineariseringen. Her er begge feltene normalisert, altså har alle vektorene lik lengde slik at det blir litt lettere å se at feltene oppfører seg likt i punkt hvor vi har linearisert.

ningen kan dermed ikke være en kontraksjon.

e) Betrakt det ikke-lineære ligningssystemet

$$\begin{cases} (x-1)^2 - y^2 + 1 = 2x \\ (y-1)^2 - x^2 + 1 = 2y \end{cases}$$

Har systemet en éntydig løsning i definisjonsområdet Ω ?

Løsning:

Det følger fra oppgaven over at systemet ikke har en éntydig løsning da avbildningen ikke har det man kaller et fikspunkt. Dette er typisk for mange ikke lineære systemer, og betyr at dersom man endrer litt på utgangspunktet for en iterasjon mot et fikspunkt vil man ende på vidt forskjellige steder.

FUN FACT! Dersom man plasserer et verdenskart hvor som helst på jordas overflate definerer "jord-kart" systemet en kontraktiv avbildning, og har et fikspunkt som nemlig er punktet på overflaten hvor kartet ligger.

Vektorfelt

Vi betrakter vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + y, xz + x, xy)$$

a) Finn en potensialfunksjon $\phi(x, y, z)$ slik at $\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

b) Beregn linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

hvor $\mathcal{C}$ er kurven parameterisert ved $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

Hint: integralene av $\sin^2 t$ *og* $\cos^2 t$ *må bestemmes ved delvis integrasjon.*

c) Hva kan du si om vektorfeltet $\mathbf{F}$ basert på resultatene fra **a)** og **b)**?

Løsning: Her har vi to valg; den enkle måten er å gjenkjenne at det å gå en runde rundt en sirkel i $\mathbb{R}^3$ fører deg tilbake til utgangspunktet. Det er altså en periodisitet i problemet, og vi sier at både $\mathbf{F}$ og $\phi(x, y, z)$ må "oppføre" seg likt både i 0 og 2π. Observer at $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ og at $\mathbf{r}(2\pi) = (1, 0, 0)$. Vi kan da bruke at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x, y, z)\Big|_{\mathbf{r}(0)}^{\mathbf{r}(2\pi)} = \phi(1, 0, 0) - \phi(1, 0, 0) = 0$$

Vi kan også gå den "lange veien" ved å bruke

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ dt$$

Vi må først bestemme at $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\sin t, \cos t, \cos t \sin t)$ og at $\mathbf{r}'(t) =$

$(-\sin t, \cos t, 0)$. Deretter ser vi at prikkproduktet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = (\sin t, \cos t, \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = \cos^2 t - \sin^2 t$$

Linjeintegralet har nå blitt redusert til

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t - \sin^2 t\ dt$$

Her trenger vi to nyttige integraler:

$$\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin x \cos x}{2} + C$$

$$\int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Disse kan dere finne ved delvis integrasjon. Vi ser med disse resultatene at

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t - \sin^2 t\ dt = \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right]\Bigg|_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin x \cos x}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

Siden $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$ får vi

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t - \sin^2 t\ dt = \frac{2\pi}{2} - \frac{2\pi}{2} = 0$$

Altså er et linjeintegral rundt en sirkel på vektorfeltet **F** null. Vi har nå både vist at vektorfeltet **F** har en potensialfunksjon og at et linjeintegral rundt en lukket kurve i dette feltet er null. Dette impliserer at vektorfeltet er konservativt.

Markov - kjeder og stokastiske matriser

Dere skal nå få jobbe med lineær algebra på sitt beste. Stokastiske matriser, også kalt Markov systemer, beskriver dynamikken til sannsynlighetsfordelte hendelser. Dette dekker alt fra populasjonsvekst til diffusjonen av gasser gjennom tynne membraner. Vi skal se på et "enklere" tema. Fysisk DVD - utleie er ikke like relevant i disse dager som det var for 10 år siden, men la oss betrakte tre DVD - utleiere A, B og C. Når en film blir leid hos utleier A vil filmen bli leverte tilbake til A 30% av tiden, til B 30% av tiden og til C 40% av tiden. Legg merke til at summen av sannsynlighetene for hvert tilfelle tilsvarer 100%. Tilsvarende for utleier B har vi A : 40%, B : 40% og C : 20%, og for den siste utleieren C har vi A : 50%, B : 30% og C : 20%.

a) En god øvelse vil være å lage en matrise av denne informasjonen selv, men svaret vil følge under da den er helt nødvendig for de resterende oppgavene. Prøv likevel å forstå hvorfor matrisen ser ut som den gjør! Hva slags informasjon får vi fra radene og kolonnene?

Løsning:

For å konstruerer denne matrisen kan det være greit å fokusere på kolonnene. Det første objektet i hver kolonne beskriver sannsynligheten for at en DVD leid ved butikk A blir levert til butikken som tilsvarer kolonnen, mens det andre og tredje objektet beskriver sannsynligheten for at en DVD leid ved butikk B eller C blir levert til butikken som tilsvarer kolonnen vi befinner oss i. Generelt tilsvarer et objekt a_{ij} sannsynligheten for at en DVD leid ved butikk i blir levert til butikk j. I de tre tilfellene hvor $i = j$ befinner vi oss på diagonalen og disse objektene bestemmer hva sannsynligheten for at en DVD leid ved butikk i blir levert til samme butikk senere. Andre ting vi kan legge merke til med denne matrisen er at summen av objektene i hver kolonne alltid er 1; altså er sannsynligheten for at en DVD som blir leid hvor som helst blir levert tilbake alltid 100%. Vi kan også bemerke oss at dette ikke trenger å stemme i hver rad. Det er for eksempel 80% sjanse for at en DVD blir levert tilbake til butikk C (tredje og nederste rad), og det er 120% sjanse for at en DVD blir levert til butikk A (første og øverste rad).

b) La

$$M = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Bestem egenverdiene λ til M og finn tilhørenede egenvektorer.

Løsning:

Vi finner egenverdier ved å bestemme $\det(M - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$. Vi får

$$(1/10)\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 & 5 \\ 3 & 4-\lambda & 3 \\ 4 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Vi får

$$(1/10)\left((3-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda)-6) - 4(3(3-\lambda)-12) + 5(6-4(4-\lambda))\right)$$

Litt algebra gir

$$(0.1-\lambda)(0.2+\lambda)(1-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$$

som sier at vi har tre egenverdier $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = -0.2$ og $\lambda_3 = 1$. For å finne egenvektorer kjenner vi at en egenvektor tilfredsstiller $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vi kan altså finne egenvektorer $\mathbf{x}$ slik at

$$(M - \lambda_i I) = \mathbf{0}$$

hvor $\mathbf{0}$ er nullvektoren. Som jeg nevnte i eksamensverkstedet lagde jeg noen av oppgavene uten å tenke på hvor mye regning som fulgte med, og dette er en av disse oppgavene. Derfor gir jeg dere oppskriften på hva dere skal gjøre med slike oppgaver, og selv har jeg løst dem med MATLAB. Egenvektoren som tilhører λ_1 må være slik at

$$(1/10)\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Radreduserer vi matrisen over når vi utvider den med nullvektoren får vi

```
>> M1 = (1/10).*[2 4 5 0;3 3 3 0; 4 2 1 0];
>> rref(M1)

ans =

    1.0000         0   -0.5000         0
         0    1.0000    1.5000         0
         0         0         0         0
```

Figure 4: Radreduksjon av utvided matrise for $\lambda_1 = 0.1$.

Altså må egenvektoren til $\lambda_1 = 0.1$ være slik at $x = 0.5z$, $y = -1.5z$ og z er fri.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5z \\ -1.5z \\ z \end{pmatrix}$$

Siden z er en fri variabel kan vi sette den til $z = 2$ og få

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende for de to andre egenverdiene har vi

$$(1/10) \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

$$(1/10) \begin{bmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De utvidede matrisene lar seg radreduserer til henholdsvis

```
>> M2 = (1/10).*[5 4 5 0; 3 6 3 0; 4 2 4 0];
>> rref(M2)

ans =

     1     0     1     0
     0     1     0     0
     0     0     0     0
```

Figure 5: Radreduksjon av utvided matrise for $\lambda_2 = -0.2$.

og

I Figur 2 ser vi at egenvektoren med tilhørende egenverdi $\lambda_2 = -0.2$ må være

```
>> M3 = (1/10).*[-7 4 5 0; 3 -6 3 0; 4 2 -8 0];
>> rref(M3)

ans =

    1.0000         0   -1.4000         0
         0    1.0000   -1.2000         0
         0         0         0         0
```

Figure 6: Radreduksjon av utvided matrise for $\lambda_3 = 1$.

slik at $x = -z$ og $y = 0$ med z som fri variabel. Da har vi

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor jeg har valgt $z = 1$ siden den er fri. I Figur 3 ser vi at den siste egenvektoren som tilhører $\lambda_3 = 1$ må være slik at $x = 1.4z$ og $y = 1.2z$ med z som fri variabel. Velger vi $z = 5$ får vi

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) Ved $t = 0$ har utleier A en beholdning på 30 DVD - er, utleier B en beholdning på 40 og utleier C en beholdning på 20. Skriv denne initielle vektoren $\mathbf{x}_0 = (30, 40, 20)$ som en lineær kombinasjon av egenvektorene til M og bestem

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{M}^t \mathbf{x}_0$$

Løsning:

Igjen så har jeg valgt veldig dumme tall, så her kan det være nyttig å bruke MATLAB atter en gang. For å skrive den inititelle vektoren som en lineærkombinasjon av egenvektorene kan vi radredusere den utvidede matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & 30 \\ -3 & 0 & 6 & 40 \\ 2 & 1 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

```
>> E = 0.1.*[1 -1 7 30; -3 0 6 40; 2 1 5 20];
>> rref(E)

ans =

    1.0000         0         0   -3.3333
         0    1.0000         0    1.6667
         0         0    1.0000    5.0000
```

Figure 7: Radreduksjon for å bestemme konstanter c_1, c_2 og c_3 i lineærkombinasjonen av egenvektorer.

Altså har vi at $\mathbf{x}_0 = -(10/3)\mathbf{x}_1 + (5/3)\mathbf{x}_2 + 5\mathbf{x}_3$. Vi kan derfor finne

$$\lim_{t\to\infty} M^t\mathbf{x}_0 = -\frac{10}{3}(0.1)^t\mathbf{x}_1 + \frac{5}{3}(-0.2)^t\mathbf{x}_2 + 5(1)^t\mathbf{x}_3 \to 5\mathbf{x}_3$$

$$\lim_{t\to\infty} M^t\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix}$$

d) Dersom du gjorde **a)**, kunne du brukt informasjonen i matrisen til å forutse svaret i **c)** ?

Løsning:

Her ville jeg at dere skulle ta i betraktning at i **a)** ser man at sannsynligheten for at en DVD blir levert til butikk A er mer enn 100%, og vi burde derfor kunne forvente at butikk A sitter igjen med flest DVD-er i det lange løp. Betraktninger utover dette kan dere vente med til dere tar MAT1120!

Harmonisk bølge

La funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x, y) = (x + y)e^{-(x^2+y^2)}$$

a) Bestem de stasjonære punktene til f, og avgjør deretter om disse punktene er sadel-, minimums- eller maksimumspunkter.

Løsning:

Vi skal bestemme stasjonære punkter, altså punkter (x, y) slik at $\nabla f(x, y) = 0$. Vi begynner derfor med å finne gradienten til f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-(x^2+y^2)} \big(1 - 2x^2 - 2xy\big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-(x^2+y^2)} \big(1 - 2y^2 - 2xy\big)$$

Her har vi to klare kandidater; $(1/2, 1/2)$ og $(-1/2, -1/2)$.

For å bestemme konkaviteten til f bruker vi andrederivert-testen ved å konstruere en Hessematrise H. Den tar formen

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

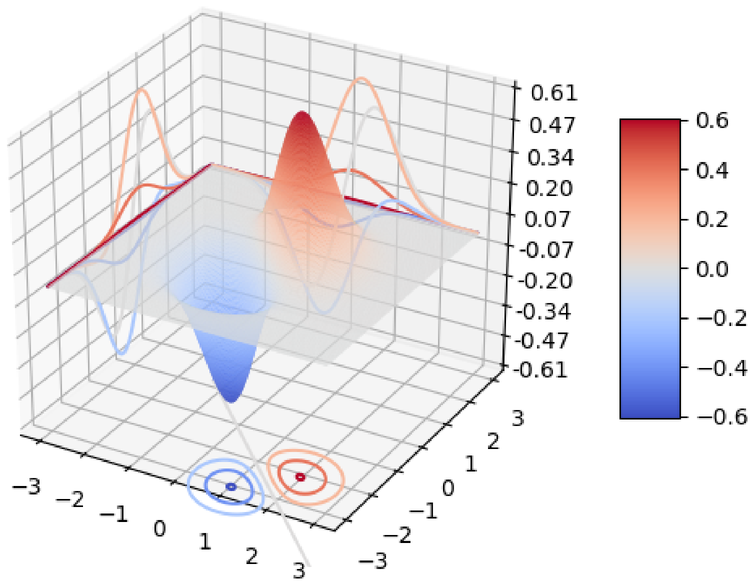

Figure 8: Vi bestemmer stasjonære punkter til denne funksjonen, som klart har to veldefinerte maks/min-punkter.

Beregner vi de fire partielle andrederiverte finner vi at

$$H = \frac{1}{e^{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} -2x(1-2x^2-2xy)-4x-2y & -2y(1-2x^2-2xy)-2x \\ -2x(1-2x^2-2xy)-2y & -2y(1-2x^2-2xy)-4y-2x \end{bmatrix}$$

Setter vi inn for koordinatene som bestemmer nullpunktene til gradienten av f får vi

$$H(1/2, 1/2) = \frac{1}{e^{1/4}} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Som må være et maksimum da $\det(H) > 0$ og elementene på diagonalen er strengt mindre enn null. For punktet $(-1/2, -1/2)$ får vi

$$H(-1/2, -1/2) = \frac{1}{e^{1/4}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

som må være et minimum da $\det(H) > 0$ og elementene på diagonalen er strengt større enn null. Ta dere tid til å trekke linjer mellom konkavitet i én dimensjon og i flere dimensjoner; dersom en éndimensjonal funksjon har et nullpunkt x_0 og $f''(x_0) < 0$ sier vi at x_0 er et toppunkt fordi funksjonen bare avtar på beggesider av x_0. Dersom $f''(x_0) > 0$ er x_0 et bunnpunkt fordi funksjonen bare stiger på begge sider av x_0. Det samme gjelder her; dersom Hessematrisen er det vi kaller "positivt bestemt" i $\mathbf{x_0}$ er vi i et minimumspunkt fordi funksjonen bare stiger rundt $\mathbf{x_0}$. Dersom Hessematrisen er "negativt bestemt" i $\mathbf{x_0}$ befinner vi oss i et maksimumspunkt siden funksjonen bare avtar rundt $\mathbf{x_0}$.

Volumintegraler

La $R = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 3\}$ og beregn volumet som avgrenses når funksjonene

$$g(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

og

$$h(x, y) = 3 - x^2 - y^2$$

skjærer hverandre i området R.

Løsning:

Det aller første vi gjør i slike oppgaver er å bestemme den "øvre" funksjonen, altså den funksjonen som avgrenser volumet i den øvre grensen. Det er lett å se at $f(0, 0) < g(0, 0)$, altså er funksjonen g den "øvre" funksjonen. Volumintegralet vi skal beregne er derfor

$$V = \iint_R 3 - (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \; dxdy$$

Siden domenet R er en disk med radius 3 gjør vi med en gang om til polarkoordinater og husker på **Jacobi-determinanten**! Vi må da ha

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 3r - r^2 - r^3e^{-r^2} \; drd\theta$$

Siden volumet er helt uavhengig av vinkelen θ trekker vi med en gang ut konstanten 2π slik at

$$V = 2\pi \left[\int_0^3 3r - r^2 - r^3e^{-r^2} \; dr \right]$$

De to første leddene i integralet er rett frem å integrere, mens det tredje krever litt mer behandling. Vi kan dele opp integralet ved

$$V = 2\pi \left[\int_0^3 3r \; dr - \int_0^3 r^2 \; dr - \int_0^3 r^3 e^{-r^2} \; dr \right]$$

slik at

$$V = 2\pi \left[\frac{27}{2} - \frac{27}{3} - \int_0^3 r^3 e^{-r^2} \; dr \right]$$

Utfører vi nå substitusjonen $u = -r^2$ slik at $dr = -du/2r$ kan vi skrive om det siste integralet slik

$$I = -\frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(3)} u e^u \; du$$

Dette løser vi med delvis integrasjon og får

$$I = -\frac{1}{2} \left[u e^u \Big|_{u(0)}^{u(3)} - \int_{u(0)}^{u(3)} e^u \; du \right] = -\frac{1}{2} \left[u e^u \Big|_{u(0)}^{u(3)} - e^u \Big|_{u(0)}^{u(3)} \right]$$

Substituerer vi tilbake for $u = -r^2$ (det er derfor jeg aldri skrev hva de nye grensene er) får vi

$$I = -\frac{1}{2} \left[-r^2 e^{-r^2} \Big|_0^3 - e^{-r^2} \Big|_0^3 \right] = -\frac{1}{2} \left(-9e^{-9} - e^{-9} \right) = 5e^{-9}$$

Setter vi inn igjen verdien for det siste integralet ser vi at

$$V = 2\pi \left[\frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 5e^{-9} \right]$$

Lukket rektangel

La $R = [0, 6] \times [0, 4]$ og beregn

$$\int_{\mathcal{C}} (y^4 - 2y) \; dx - (6x - 4xy^3) \; dy$$

hvor $\mathcal{C}$ er kurven som fremkommer ved å gå mot klokken langs periferien av området R.

Løsning:

Her må vi gjenkjenne at vi kan bruke Greens teorem:

$$\oint_{\mathcal{C}} (P\ dx + Q\ dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\ dxdy$$

med $P = y^4 - 2y$ og $Q = -6x + 4xy^3$. Da ser vi at

$$\int_{\mathcal{C}} (y^4 - 2y)\ dx - (6x - 4xy^3)\ dy = \iint_R \big((-6 + 4y^3) - (4y^3 - 2)\big)\ dxdy = \iint_R -4\, dA$$

hvor siste likhet impliserer at linjeintegralet rundt rektangelet R bare er -4 ganger arealet av rektangelet. For de som lurer så endrer jeg fra $dxdy$ til dA ettersom vi sitter igjen med en konstant funksjon $f = -4$ som ikke varierer med hverken x eller y. Det endelige svaret er derfor at linjeintegralet må være

$$\int_{\mathcal{C}} (y^4 - 2y)\ dx - (6x - 4xy^3)\ dy = -4 \cdot 6 \cdot 4 = -96$$

Rekke

Avgjør for konvergensområdet for

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(2-x)^n}{(n-1)!}$$

Løsning: Det kan vises at rekker a_n konvergerer dersom

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Det første vi gjør er altså å bestemme fraksjonen a_{n+1}/a_n. Vi har da

$$\frac{(n+1)!(2-x)^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!(2-x)^n}$$

Bruker vi at $n! = n(n-1)!$ og $(n+1)! = (n+1)n!$ (dette er lett å se hvis vi tenker på $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2!$ og $4! = (3+1)! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 3! = (3+1) \cdot 3!$.) Vi må da ha

$$\frac{(n+1)n!}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n(n-1)!}(2-x) = \frac{n+1}{n}(2-x)$$

Altså ser vi på

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}(2-x)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|(2-x)| < 1$$

Ser vi bare på grensen har vi at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right) = 1$$

Vi har derfor kun konvergens dersom

$$|2-x| < 1$$

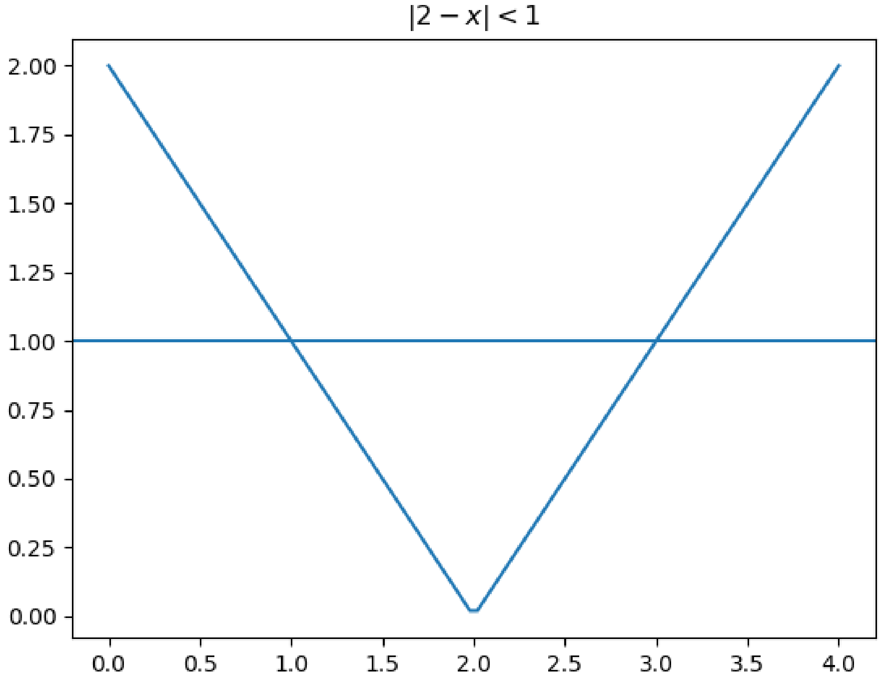

Figure 9: Plot av $|2 - x|$. Alle verdiene for x som gir konvergens ligger i det avgrensede området.

Det er lett å se på plottet (og forsåvidt fra ligningen vår) at konvergensradiusen er 1 med sentrum i $x = 2$. Alle verdier av x som lar rekken konvergere ligger i det avgrensede området nedenfor $y = 1$. Vi må likevel sjekke hva som skjer i grensene for å bestemme på hvilket intervall rekken konvergerer. Vi setter først inn $x = 1$. Dette gir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!1^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

som helt klart divergerer. Setter vi inn for $x = 3$ har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-1)^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)!(-1)^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n$$

som også helt klart divergerer. Rekken konvergerer derfor på intervallet $x \in (1, 3)$ hvor $x = 1$ og $x = 3$ ikke er inkludert.