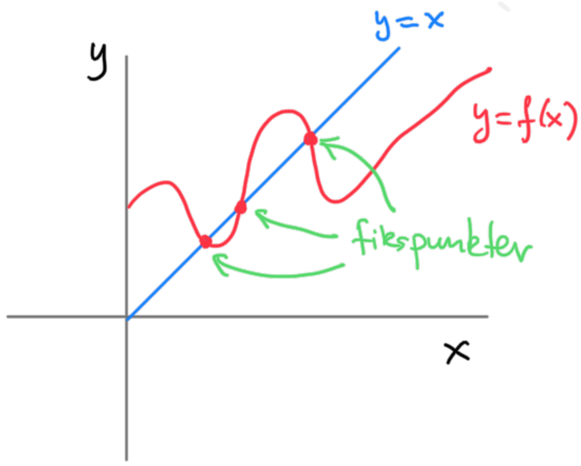
Konvergens mot et fikspunkt

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ en mengde

$\mathbb{F} : A \to \mathbb{R}^m$.

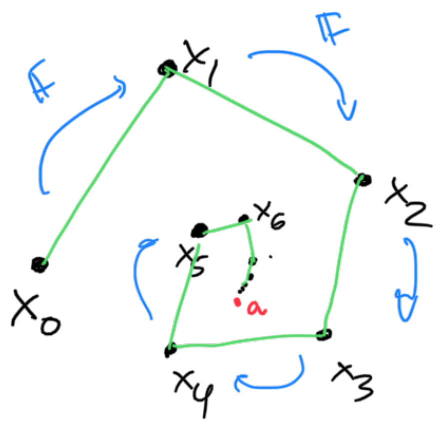
Vi sier at $x \in A$ er et fikspunkt dersom $\mathbb{F}(x) = x$.



La $x_0 \in A$ være et startpunkt, og la

$$x_{n+1} = \mathbb{F}(x_n)$$

være følgen vi får ved å iterere $\mathbb{F}$.



Spørsmål: Når konvergerer x_n?
Og hvilke startpunkter gir konvergens?

Merk: Dersom x_n konvergerer mot $a \in \mathbb{R}^m$ så er a et fikspunkt:

$$\mathbb{F}(a) = \mathbb{F}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \underset{\mathbb{F}\text{ kont.}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{F}(x_n) \underset{\text{def } x_{n+1}}{=} \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a.$$

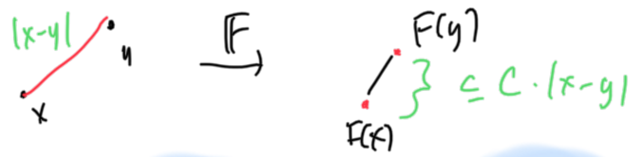
Vanskelig å svare på disse spørsmålene generelt.

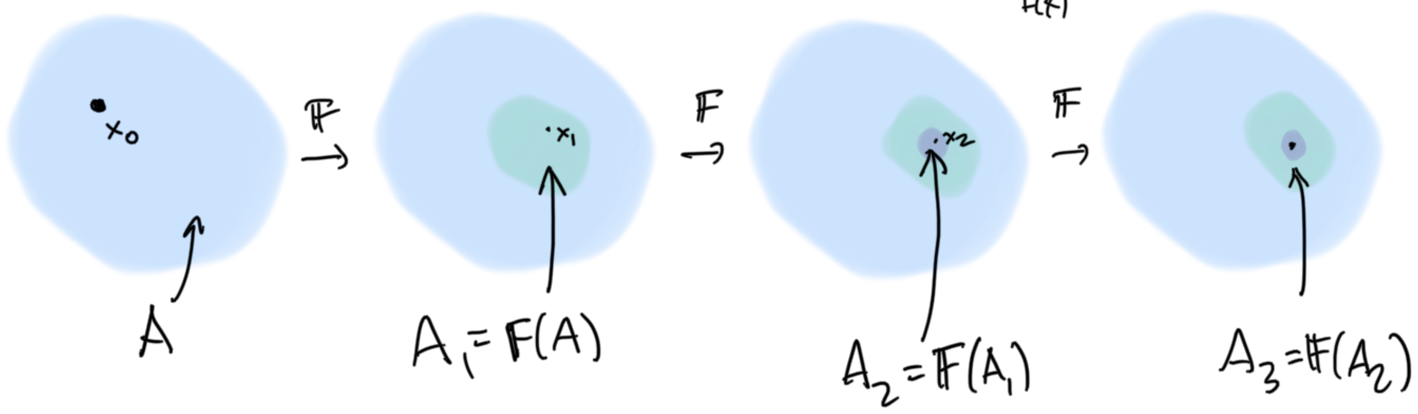
Ser på en spesiell type avbildninger $\mathbb{F}: A \to \mathbb{R}^m$:

Defn En funksjon $\mathbb{F}: A \to \mathbb{R}^m$ kalles en kontraksjon dersom

$$|\mathbb{F}(x) - \mathbb{F}(y)| \le C\,|x-y|$$

for alle $x, y \in A$. Her er C et tall med $0 < C < 1$.





$\mathbb{F}$ forminsker avstander mellom punktene $\rightsquigarrow$ intuitivt at det finnes et punkt som er "stasjonært".

Notasjon: $$\mathbb{F}^{\circ n}(x) = \underbrace{\mathbb{F}(\mathbb{F}(\mathbb{F}(\cdots \mathbb{F}(x))))}_{n \text{ iterasjoner}}$$

Lemma $\mathbb{F}: A \to A$ en kontraksjon
$C =$ kontraksjonskonstanten til $\mathbb{F}$.

Da har vi

$$|\mathbb{F}^{\circ n}(x) - \mathbb{F}^{\circ n}(y)| \le C^n\,|x-y|$$

for alle $x, y \in A$ og $n \ge 1$.

Bevis $n=1 \rightsquigarrow$ def av kontraksjon $\rightsquigarrow$ ok.

$n \geq 2$:

$$|F^{\circ n}(x) - F^{\circ n}(y)| = |F(F^{\circ(n-1)}(x)) - F(F^{\circ(n-1)}(y))|$$
$$\leq c\,|F^{\circ(n-1)}(x) - F^{\circ(n-1)}(y)| \quad \text{(def. kontraksjon)}$$
$$\leq c \cdot c^{n-1}|x-y| \quad \text{(induksjonshypotese)}$$
$$= c^n |x-y|.$$

$\square$

Ser vi igjen på følgen $x_{n+1} = F(x_n)$, får vi

$$|x_n - x_{n+1}| = |F^{\circ n}(x_0) - F^{\circ n}(x_1)| \leq c^n |x_0 - x_1|$$

$\therefore$ $|x_n - x_{n+1}|$ går mot 0 når $n \to \infty$ (fordi $c^n \to 0$ for $0 \leq c < 1$)

Banachs fikspunktteorem

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ lukket delmengde.

$F: A \to A$ kontraksjon med kontraksjonsfaktor $c \in [0,1)$.

Da har F nøyaktig ett fikspunkt x i A. ($F(x) = x$)

Uansett hvilken $x_0 \in A$ vi starter med, vil følgen

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

konvergere mot x.

Videre, vi har følgende estimat for "feilen"

$$|x_n - x| \leq \frac{c^n}{1-c} |x_0 - x_1|. \qquad (*)$$

Bevis

Fikspunktet x er entydig:

Dersom det finnes to fikspunkter x, y

$\mathbb{F}$ kontraksjon

$$\rightsquigarrow \quad |x-y| = |\mathbb{F}(x) - \mathbb{F}(y)| \leq C\,|x-y|$$

$$0<C<1 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x = y.$$

Må vise at $\{x_n\}$ konvergerer.

Viser først at $\{x_n\}$ er en Cauchy-følge.

$$|x_n - x_k| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + (x_{n+2} - x_{n+3}) + \dots + (x_{k-1} - x_k)| \qquad n<k$$

trekantulikhet

$$\leq |x_n - x_{n+1}| + \dots + |x_{k-1} - x_k|$$

lemma

$$\leq C^n|x_0 - x_1| + C^{n+1}|x_0 - x_1| + \dots + C^{k-1}|x_0 - x_1|$$

$$\leq (C^n + C^{n+1} + \dots\ )\,|x_0 - x_1|$$

geometrisk rekke

$$= \frac{C^n}{1-C}|x_0 - x_1|. \qquad (**)$$

Kan velge n s.a $\frac{C^n}{1-C}|x_0 - x_1|$ er mindre enn en gitt $\varepsilon > 0$.
$(C<1)$

$\rightsquigarrow$ x_n er en Cauchy-følge.

Kompletthet av $\mathbb{R}^m$ $\rightsquigarrow$ x_n konvergerer mot en $x \in \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow$ $x \in A$ siden A er lukket.

Sjekker at $\mathbf{x}$ er et fikspunkt for $\mathbb{F}$:

$$\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{F}(\mathbf{x}_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{F} \text{ kontinuerlig.}}}{=} \mathbb{F}(\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n) = \mathbb{F}(\mathbf{x}).$$

Til slutt viser vi formelen (*):

Fra (**), har vi

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k| \leq \frac{c^n}{1-c} |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1| \qquad \text{for } k > n$$

La $k \to \infty$:

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| \leq \frac{c^n}{1-c} |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1| \qquad \rightsquigarrow \text{bevis ferdig } \square$$

Nyttig ulikhet: $|A\cdot \mathbf{x}| \leq \|A\| \cdot |\mathbf{x}|$

der $\|A\| = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$ ← "Cauchy-Schwarz ulikheten"

Eks La $\mathbb{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\mathbb{F}(x_0, x_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{F}(\mathbf{x}) - \mathbb{F}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - y_0 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow |\mathbb{F}(\mathbf{x}) - \mathbb{F}(\mathbf{y})| \leq \left\| \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \right\| \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

$$= \sqrt{(1/2)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2 + (1/4)^2} \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

$$= \sqrt{\frac{77}{144}} \cdot |x - y|$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}$ er en kontraksjon med $C = \sqrt{\frac{77}{144}} \approx 0.7312\ldots$ ✓

Fikspunktet er $(x_0, x_1) = \left(\frac{78}{19}, \frac{60}{19}\right)$. ☐

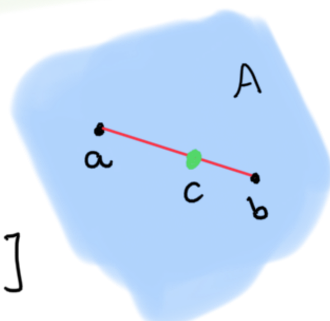
Middelverdisetningen i flere variable

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ $\quad a, b \in A$

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deriverbar i et område som inneholder linjestykket mellom **a** og **b** i $\mathbb{R}^m$

Da finnes en $c \in \mathbb{R}^m$ på linjestykket mellom **a** og **b** s.a

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$



$\xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Bevis Parametriserer linjestykket:

$$r(t) = a + t(b - a) \quad t \in [0,1]$$

Definer $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$g(t) = f(r(t))$$

Kjerneregelen $\rightsquigarrow$ $g'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$

$$= \nabla f(r(t)) \cdot (b - a) \quad (*)$$

Middelverdisetningen i én variabel $\rightsquigarrow$ det finnes $c \in [0,1]$ s.a

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(c) = \nabla f(r(c)) \cdot (b - a)$$

Regner ut venstresiden: $\quad g(1) = f(r(1)) = f(b)$

$\quad g(0) = f(r(0)) = f(a)$

$\rightsquigarrow$ setter vi $c = r(c)$ får vi dermed

$$f(b) - f(b) = \nabla f(c) \cdot (b - a) \qquad \square$$

Setning 5.5.7

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathbb{F}: A \to \mathbb{R}^m$ deriverbar i et område som inneholder linjestykket mellom a og b i $\mathbb{R}^n$.

Da finnes $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}^n$ s.a

$$|\mathbb{F}(b) - \mathbb{F}(a)| \leq \sqrt{|\nabla F_1(c_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(c_m)|^2} \cdot |b - a|$$

$\mathbb{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$

Bevis Forrige setning anvendt på F_i $(i = 1 \dots m)$

$\rightsquigarrow$ finner c_i på linjestykket s.a

$$|F_i(b) - F_i(a)| = |\nabla F_i(c_i) \cdot (b - a)|$$

Cauchy-Schwarz ulikheten ($|a \cdot b| \leq |a||b|$)

$$\rightsquigarrow \quad |F_i(b) - F_i(a)| \leq |\nabla F_i(c_i)| \cdot |b - a|$$

$$\rightsquigarrow \quad |F(b) - \mathbb{F}(a)| = \sqrt{(F_1(b) - F_1(a))^2 + \dots + (F_m(b) - F_m(a))^2}$$

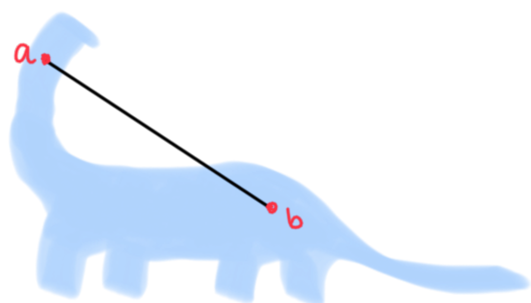
$$\leq \sqrt{|\nabla F_1(c_1)|^2 |b-a|^2 + \dots + |\nabla F_m(c_m)|^2 |b-a|^2}$$

$$= \sqrt{|\nabla F_1(c_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(c_m)|^2}\ |b-a|$$

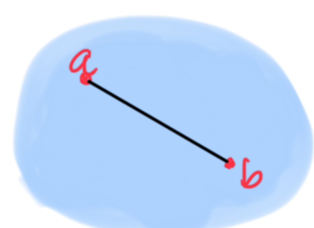
$\rightsquigarrow$ ulikheten holder. $\square$

Konvekse mengder

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ kalles **konveks** dersom for alle $a, b \in A$, er også linjestykket fra a til b også med i A.



Ikke konveks



Konveks

Setning 5.5.8

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ ikke-tom, lukket, konveks mengde.

$\mathbb{F}: A \longrightarrow A$ deriverbar

Anta det finnes en $C < 1$ s.a

$$\sqrt{|\nabla F_1(c_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(c_m)|^2} \leq C \text{ for alle } c_i \in A.$$

Da er $\mathbb{F}$ en kontraksjon, og

$$|\mathbb{F}(x) - \mathbb{F}(y)| \leq C|x-y| \quad \text{for alle } x, y \in A.$$

Ved Banachs fikspunkt teorem har også $\mathbb{F}$ et entydig fikspunkt i A.

Bevis Følger fra setning 5.5.7

(Merk at vi trenger at linjestykkene mellom punkter x og y også er inneholdt i A for å bruke 5.5.7)

Oppsummering

Gitt $\mathbb{F}: A \to A$ en deriverbar funksjon.

- Dersom $\mathbb{F}$ er en kontraksjon, finnes det et entydig fikspunkt $x \in A$ som løser likningen

$$\mathbb{F}(x) = x.$$

- Vi finner x ved iterasjon $x_{n+1} = \mathbb{F}(x_n)$ ($x_0 \in A$ vilkårlig)

Banachs FPT: Denne følgen vil konvergere (raskt) mot x.

- For å vise at $\mathbb{F}: A \to A$ faktisk er en kontraksjon:

Regn ut $\nabla F_1, \ldots, \nabla F_m$ der $\mathbb{F}(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$.

Forsøk å begrense funksjonen

$$\sqrt{|\nabla F_1|^2 + \ldots + |\nabla F_m|^2}.$$

Dersom denne er $\leq C$ for en konstant $0 \leq C < 1$ er $\mathbb{F}$ en kontraksjon.