Velkommen!

hand raise / chat i zoom

Spørsmål i pausen

3 forelesninger til om rekker

eksamensoppgaver og prøveeksamen

mentimeter

Forholdstesten

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke, og anta at $a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksisterer. Da gjelder

(i) $a < 1$: Rekka konvergerer

(ii) $a > 1$: Rekka divergerer

(iii) $a = 1$: Ingen konklusjon

Bevis: Anta $a < 1$. Velg r slik at $a < r < 1$.

Det finnes en N slik at $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ for alle $n \geq N$

Da er:

$$a_{N+1} < r a_N$$

$$a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N$$

$$\vdots$$

$$a_{N+k} < r^k a_N$$

Definer rekka b_n ved $b_{N+k} = r^k a_N$, $k \geq 0$

(definer ikke $b_1, \ldots, b_{N-1}$)

Vi ser at $\sum_{k \geq N} b_k$ er en konvergent rekke.

(geometrisk med $r < 1$)

Videre er $a_{N+k} < b_{N+k}$

Sammenligningstesten sier da at a_n også er konvergent.

(ii) Anta $a > 1$. Da er $a_{n+1} > a_n$ for alle n store nok. Leddene kan da ikke gå mot 0, og divergenstesten sier at rekka divergerer.

$\blacksquare$

Eksempel 1 Hva blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^{10}}{n!}$?

Løsning:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{6(n+1)^{10}}{(n+1)!}}{\frac{6n^{10}}{n!}} = \frac{n!\ \cancel{6}(n+1)^{10}}{(n+1)!\ \cancel{6}n^{10}}$$

$$= \underbrace{\frac{(n+1)^{10}}{n^{10}}}_{\to 1} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

Siden $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, så konvergerer rekken.

Eksempel 2 Hva blir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ for en gitt x?

Løsning: Har vi konvergens?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

Derfor konvergerer rekka for alle x.

Vi husker også:

$$e^x = T_k(x) + R_k(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\to 0}$$

Grenseverdien for rekka blir e^x.

Kommer tilbake til Taylorrekker i kap. 12

Rottesten: La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke, og anta at $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ eksisterer.

Da gjelder

(i) $a<1$: Rekka konvergerer

(ii) $a>1$: Rekka divergerer

(iii) $a=1$: Ingen konklusjon

Bevis: Anta $a < r < 1$. Det finnes en N slik at

$\sqrt[n]{a_n} < r$ for alle $n \geq N$.

Da er $a_n < r^n$, alle $n \geq N$

Gjør vi sammenligningstesten med (den konvergente) geometriske rekka $b_n = r^n$, så ser vi at $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ også konvergerer.

(ii) Anta $a > 1$: Da er $a_n \geq 1$ for alle store nok n. Divergenstesten sier da at rekka divergerer. $\blacksquare$

Eksempel 3 Konvergerer rekka $\sum_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$?

Løsning: $\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \to e^{-2} < 1$

Siden $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$, alle x.

Derfor vil rekka konvergere.

Seksjon 12.3 Alternerende rekker

En rekke kalles alternerende hvis to ledd som følger rett etter hverandre alltid har motsatt fortegn.

Test for alternerende rekker

Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en alternerende rekke der $a_n \to 0$, og der $|a_n|$ er avtagende. Da gjelder at

1) Rekka konvergerer

2) Med $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ summen av rekka, så har vi

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| \qquad \left(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \right)$$

(et estimat på feilen ved å bare ta med n ledd).

Bevis: Anta $a_1 > 0$. Vi kan skrive

$$S_{2n} = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{>0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-1} + a_{2n})}_{>0}$$

$$= a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{<0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{<0} + \underbrace{a_{2n}}_{<0}$$

Derfor: S_{2n} er voksende, og oppad begrenset av a_1.

Det følger at S_{2n} konvergerer mot et tall S (Teorem 4.3.9 i Kalkulus)

På samme måte:

$$S_{2n+1} = a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{<0} + \cdots\cdots + \underbrace{(a_{2n} + a_{2n+1})}_{<0}$$

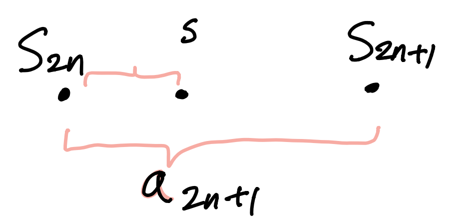
$$= \underbrace{(a_1 + a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{>0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-1} + a_{2n})}_{>0} + a_{2n+1}$$

Derfor S_{2n+1} er avtagende, og nedad begrenset,
Det følger at S_{2n+1} konvergerer mot et tall T.

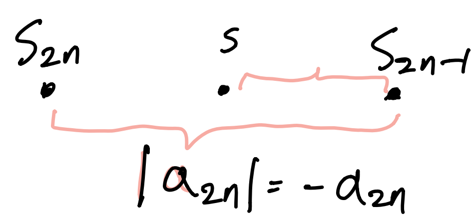
Ser at $T - S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$

$$= \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \overset{\text{antagelse}}{=} 0$$

Derfor er $T = S$, og rekka konvergerer mot s



ser at $|s - S_{2n}| \le |a_{2n+1}|$



ser at $|s - S_{2n-1}| \le |a_{2n}|$

Derfor er $|s - S_n| \le a_{n+1}$ for alle n. ∎

Eksempel 4 a) Konvergerer rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$?

Løsning: Rekka er alternerende, $a_n \to 0$, og $|a_n|$ er avtagende. Testen for alternerende rekker sier da at rekka konvergerer.

b) Hvor mange ledd må vi ta med for å få en feil (fra summen av hele rekka) som er ≤ 0.01?

Løsning: Vi har at $|s - s_n| \leq |a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} \right| = \frac{1}{2(n+1)}$

Vi krever $\frac{1}{2(n+1)} \leq 0.01$, slik at $2(n+1) \geq 100$, slik at $2n \geq 98$, $n \geq 49$. Mange ledd!

Seksjon 12.8: Summen kan her faktisk regnes ut eksakt ved hjelp av leddvis derivasjon av potensrekker. Får da sum blir $\underline{-\frac{1}{2} \ln 2}$

Seksjon 12.4 Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sies å **konvergere absolutt** hviss $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

En konvergent rekke som ikke er absolutt konvergent sies å være **betinget konvergent**.
(slik som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$ fra eksempel 4)

tas absoluttverdi fås den harmoniske rekka.

Setning 12.4.2 En absolutt konvergent rekke er alltid konvergent.

Bevis: Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutt konvergent, og definer rekkene

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{hvis } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{hvis } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Begge er positive rekker.

Vi har at
$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$$
$$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

Derfor konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ på grunn av sammenligningstest

Vi får nå $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$,

og derfor er a_n-rekka konvergent ■

Setning 12.4.5 (forholdstesten igjen)

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en rekke s.a. $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$ eksisterer. Da gjelder:

1) $a < 1$: Rekka konvergerer absolutt.
2) $a > 1$: Rekka divergerer
3) $a = 1$: Ingen konklusjon

Setning 12.4.6 (rottesten igjen)

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en rekke s.a. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ eksisterer. Da gjelder

1) $a < 1$: Rekka konvergerer absolutt
2) $a > 1$: Rekka divergerer
3) $a = 1$: Ingen konklusjon

Bevisene for begge fås ved å bruke forholdstesten/rottesten på den positive rekka $\sum |a_n|$.

Eksempel 5: Konvergerer rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - 1\right)^{n^2}$? (se eks. 3)

Løsning: Samme grenseverdi for $\sqrt[n]{|a_n|}$ som i eks 3, så $a = e^{-2}$. Derfor er rekka absolutt konvergent.