Forelesning 5. mai

12.5 - 12.8 i Kalkulus

Rekker på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ kalles potensrekker

Spørsmål: 1) For hvilke x konvergerer potensrekken

2) Hva blir summen?

1) Teorem 12.6.1. Vi har 3 muligheter:

(i) Rekken konvergerer absolutt for alle x.

(ii) Rekken konvergerer bare for $x = a$.

(iii) Det fins en $R > 0$ slik at rekken

1) Konvergerer absolutt når $|x-a| < R$

2) Divergerer når $|x-a| > R$

$|x-a| = r$ må sjekkes spesielt (alt kan skje).

R kalles konvergensradien til rekken.

Merk: (i) og (ii) kan også uttrykkes ved "$R = \infty$" og "$R = 0$".

Eksempel 1: For hvilke x konvergerer rekken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}(x-1)^n \ ?$$

Løsning: $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^3}{4^{n+1}}(x-1)^{n+1}}{\frac{n^3}{4^n}(x-1)^n}\right| = \left|\frac{x-1}{4}\right| \left|\frac{(n+1)^3}{n^3}\right|$$

1

$$\to \left|\frac{x-1}{4}\right| \text{ når } n\to\infty$$

Forholdstesten sier:

rekka konvergerer absolutt når $\left|\frac{x-1}{4}\right| < 1$,
det vil si når $|x-1| < 4$, dvs. $x \in (-3,5)$

Hvis $x < -3$ eller $x > 5$ så divergerer rekken.

punktene der $|x-1| = 4$ må sjekkes spesielt.

$x=5$: Rekka blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^3$

$x=-3$: Rekka blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3$

Begge disse divergerer.

Konvergensintervallet blir derfor $(-3,5)$

Vi har også at $R=4$, $a=1$

2) Hvordan finne summen av en potensrekke?

Triks 1: Gjenkjenn geometriske rekker. Feks.

$$\underbrace{x^3 - x^6 + x^9}_{} - \cdots = \frac{a}{1-r} = \frac{x^3}{1-(-x^3)} = \frac{x^3}{1+x^3}$$

$a = x^3$

$r = -x^3$

Triks 2: Deriver/integrer rekka leddvis slik at du får en rekke du kjenner igjen (feks. en geometrisk rekke eller en Taylorrekke)

Triks 3: Må kanskje gange/dele rekka med en potens av x.

Setning 12.7.1/12.7.3

Hvis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ har konvergensradius R, så er

1) f deriverbar i $(a-R, a+R)$, og

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n (x-a)^{n-1} \underset{u=n-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (x-a)^n$$

2) for $x \in (a-R, a+R)$ har vi at

$$\int_a^x f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \underset{u=n+1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x-a)^n$$

Eksempel 2: a) Hva blir $f'(x)$ og $\int_0^x f(t)\,dt$

for rekka $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-2)}$

Løsning: Vi har at:

$$f'(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}$$

$u = n-1$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n(n-2)} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-3)}$$

$u = n+1$
$n = u-1$

b) Hva blir summen av rekka?

Løsning: Derivasjon av rekka ga først

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}$$

del med x: $$\frac{f'(x)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} \quad (0 \text{ for } x=0)$$

deriver: $$\left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

integrer: (ubestemt)

sett inn $x=0$

$$\underbrace{\frac{1}{x} f'(x)}_{0} = \underbrace{-\ln|1-x|}_{0} + C \Rightarrow C = 0$$

$$\frac{f'(x)}{x} = -\ln|1-x| \Rightarrow f'(x) = -x\ln|1-x|$$

integrer (bestemt) fra 0 til x

delvis integrasjon:

$$f(x)-f(0)=\left[-\frac{1}{2}t^2\ln|1-t| - \int \frac{1}{2}t^2\frac{1}{1-t}\,dt\right]_0^x$$

3 minustegn

$$\int \frac{t^2}{1-t}\,dt = \int \frac{t^2-t+t}{1-t}\,dt = \int\left(-t+\frac{t}{1-t}\right)dt$$

$$= \int\left(-t-1+\frac{1}{1-t}\right)dt = \dots$$

Kan bli mye regning.

Eksempel 3: Hva blir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$?

Løsning: Forholdstesten:

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}x^{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n}\right| = \left|x\frac{n}{n+1}\right| \to |x|$$

Konvergensradien er derfor $R=1$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

Deriver:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=1-x+x^2-\dots$$

$$=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}$$

Integrer: fra 0 til x (bestemt)

$$S(x)-\underbrace{S(0)}_{0}=\Big[\ln|1+t|\Big]_0^x$$

$$S(x)=\ln|1+x|.$$

ubestemt

$$S(x)=\ln|1+x|+C$$

sett inn $x=0$ for å finne C

$$S(0)=\ln 1 + C$$

$$0=C$$

$$S(x)=\ln|1+x|.$$

Hva skjer for $x=-1$ og $x=1$? (da er $\underbrace{|x-a|=R}_{|x|=1}$)

$x=-1$: Rekka blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = -\sum \frac{1}{n}$
divergent, siden
gjenkjenner harmoniske rekken.

$x=1$: Rekka blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
konvergent, siden
alternerende rekke.

Derfor blir konvergensområdet $(-1, 1]$ (halvåpent intervall)

Hva blir summen for $x=1$?

<u>Teorem 12.6.9</u> (Abels teorem)

$S(x)$ er kontinuerlig i <u>hele</u> konvergensområdet.

Derfor: $S(1) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln|1+x| = \ln|1+1| = \underline{\underline{\ln 2}}$

<u>Setning 12.8.3</u> Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ konvergerer i $(a-R, a+R)$, og sett $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

Da er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ Taylorrekka til f, det vil si at f er uendelig mange ganger deriverbar, og $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n \geq 0$

Bevis: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \Rightarrow f(a) = a_0$,

slik at formel stemmer for $n=0$.

Deriver leddvis:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-a)^{n-1}$$

$f'(a) = a_1$, slik at formel stemmer for $n=1$.

Deriver k ganger:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1)(x-a)^{n-k}$$

$$f^{(k)}(a) = a_n n(n-1) \cdots (k-k+1)$$
$$= a_n n!$$

$a_n = \dfrac{f^{(k)}(a)}{n!}$, slik at formel stemmer for alle n. ■

Noen kjente Taylorrekker:

a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ konv. for alle x

b) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ konv. for alle x.

c) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konv. for alle x.

d) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konv. for $x \in (-1, 1)$

e) $\ln|1+x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ $\quad x \in (-1, 1]$

Bevis for b): $f(x) = \cos x$

$$f^{(4k)}(x) = \cos x \qquad f^{(4k)}(0) = \cos 0 = 1$$

$$f^{(4k+1)}(x) = -\sin x \qquad f^{(4k+1)}(0) = 0$$

$$f^{(4k+2)}(x) = -\cos x \qquad f^{(4k+2)}(0) = -1$$

$$f^{(4k+3)}(x) = \sin x \qquad f^{(4k+3)}(0) = 0$$

$$\left| f^{(n+1)}(c) \right| = \left| \left(\pm \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right)(c) \right| \leq 1$$

restledd $\leq \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0$ når $n \to \infty$, alle x.

Taylorrekka blir: $1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$,
som er rekka vi skrev opp over. ■