Forelesning 8. mai :

Resten av kap. 12 i Kalkulus i første time.

Andre time: Siste tre års eksamensoppgaver om rekker.
Quiz kap. 12

De neste to ukene med forelesninger (som blir de siste): Jeg regner siste to års eksamensoppgaver (midtveis og avsluttende). Satser på å få lagt ut opptak for alle disse i løpet av dagen.

Et annet triks for å finne summen av en potensrekke:

Variabelskifte for å eliminere potenser (3^n, 4^n, etc.)

Eksempel 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,2^{n+3}} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,2^n} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}$$

Sett $u = \frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = \frac{1}{8}e^u = \frac{1}{8}e^{x/2}.$$

Samme hvis det sto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!\,2^{n+3}}$

Kan da i stedet sette $u = \frac{x^2}{2}$

Eksempel 2: Derivasjon / integrasjon kan måtte gjøres mange ganger:

$$S(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)} \qquad S(0) = 0$$

$$S'(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-2)} \qquad S'(0) = 0$$

$$S''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} \qquad S''(0) = 0$$

$$S'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-3} \underset{u=n-3}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n} = \frac{1}{1-x} \qquad \begin{array}{l} u = n-3 \\ n = u+3 \end{array}$$

integrerer fra 0 til x:

$$\Big[S''(t) \Big]_0^x = \Big[-\ln|1-t| \Big]_0^x$$

$$S''(x) - \underbrace{S''(0)}_{0} = -\ln|1-x|$$

$$S''(x) = -1\cdot\ln|1-x| \quad \text{delvis integrasjon}$$

$$S'(x) - \underbrace{S'(0)}_{0} = \Big[-t\ln|1-t| - \int \underbrace{\frac{t}{1-t}}\, dt \Big]_0^x$$

$$\frac{t}{1-t} = \frac{t-1+1}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t}$$

$$S(x) - S(0) = \ldots$$

En "ikke-funksjons"-rekke ser vi ofte på som et spesialtilfelle av en funksjonsrekke:

Eksempel 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n}}{n}} \quad \text{innsatt } x = 1$$

har vist: $= \ln(1+x)$ for $x \in (-1, 1]$

Abels teorem

$$= \underline{\ln 2}$$

Eksempel 4: Hva blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$?

Løsning: Rekka kan skrives som $S(\frac{1}{2})$, der

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(xS(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2-1+1}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2}$$

Delbrøksoppspalting:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}$$

$$= \frac{A(1-x)+B(1+x)}{(1-\cancel{x})^2}$$

$$= \frac{(B-A)x+A+B}{1-x^2}$$

$B-A=0 \Rightarrow A=B$

$A+B=1 \Rightarrow A=B=\frac{1}{2}$

$$(xS(x))' = -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\left[tS(t)\right]_0^x = \left[-t + \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x|\right]_0^x$$

$$xS(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$S(x) = -1 + \frac{1}{2x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$S(\tfrac{1}{2}) = -1 + \ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| = \underline{\underline{-1+\ln 3}}$$

Litt om bevisene for teorem 12.6.1, 12.7.1, 12.7.3

$\underbrace{12.6.1}_{\text{Tre konv. muligheter}}$, $\underbrace{12.7.1, 12.7.3}_{\text{leddvis derivasjon / integrasjon.}}$

Trenger følgende:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lemma 12.6.7: Hvis } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergerer} \\ \text{for } x=b,\ b\neq 0,\ \text{så konvergerer rekken} \\ \text{absolutt for alle } x \text{ s.a. } |x|<|b|. \\ \text{Konvergensen er uniform på } [-c,c] \\ \text{når } 0<|c|<|b|\end{array}}$$

Seksjon 11.3: $\{f_n\}$ sies å konvergere uniformt mot f på mengden A hvis

$$\sup_{x\in A}\{f_n(x)-f(x)\}\to 0 \text{ når } n\to\infty.$$

(f_n, f alle definert på A).

Bevis: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ konvergerer, slik at $a_n b^n \to 0$ (divergenstesten).

Det finnes da et tall K slik at $|a_n b^n| < K$ for alle k.

Anta c er slik at $0<c<|b|$.

For $x\in[-c,c]$ har vi da

$$|a_n x^n| = \underbrace{|a_n b^n|}_{<K} \left|\frac{x}{b}\right|^n < K \underbrace{\left|\frac{c}{b}\right|^n}$$

Siden $c<|b|$ er dette leddene i en konvergent geometrisk rekke.

Sammenligningstesten: $\sum a_n x^n$ konvergerer absolutt.

Weierstrass M-test (setning 12.5.1) er det som gir uniform konvergens ∎

Bevis setning 12.7.1 (leddvis integrasjon):

Sett $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \qquad |x|<R$

pga lemma 12.6.7 har vi at $f_N \to f$ uniform (kalte grensen for f).

Setning 11.4.1 gir at

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_N(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$ ∎

2019 oppgave 4

Konvergensområde og sum for

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{n}$$

Løsning:

$$\frac{S(x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n}$$

$x=1$
$\downarrow$
0

$$\left(\frac{Sx}{x-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(x-1)^{2n-1}}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2(x-1)^{2n-1} \left(= 2(x-1) + 2(x-1)^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}$$

$u = 1-(x-1)^2$

$du = -2(x-1)\,dx$

$2(x-1)\,dx = -du$

integrer:

$$\frac{S(x)}{x-1} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|1-(x-1)^2| + C$$

sett inn $x=1$:

$$0 = -\ln 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\frac{S(x)}{x-1} = -\ln|1-(x-1)^2|$$

$$S(x) = -(x-1)\ln|1-(x-1)^2|.$$

Konvergensområde: forholdstesten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(x-1)^{2n+3}}{(n+1)}}{\frac{(x-1)^{2n+1}}{n}}\right|$$

$$= \left|(x-1)^2 \frac{n}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} |x-1|^2.$$

$|x-1|^2 < 1$ for $x \in (0,2)$. (absolutt konvergent)

$|x-1|^2 = 1$ for $x=0$ og $x=2$.

$$S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{div.}$$

$$S(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{div.}$$

$|x-1|^2 > 1$: divergent.

Konvergensområde er $(0,2)$

sum: $S(x) = -(x-1)\ln\left(1-(x-1)^2\right)$

2018 Oppgave 3

a) $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n (n+5)!}{n!} (x-2)^n$$

Når konvergerer rekka?

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\frac{e^{n+1}(n+6)!\,(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n (n+5)!\,(x-2)^n}{n!}} \right|$$

$$= \left| \frac{e(n+6)(x-2)}{n+1} \right| \xrightarrow{n\to\infty} |e(x-2)|$$

$$e|x-2| < 1 \iff |x-2| < e^{-1} = R$$

Absolutt konvergens i $(2-e^{-1}, 2+e^{-1})$.

$x = 2 \pm e^{-1}$: $\quad a_n = \frac{e^n (n+5)!}{n!} (\pm e^{-1})^n$

$$|a_n| = \frac{(n+5)!}{n!} = (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) \to \infty$$

Rekka divergerer på grunn av divergenstesten.

Konvergensområdet blir $(2-e^{-1}, 2+e^{-1})$.

b) Hva blir $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+3}}{4^{2n+3}(2n+1)!}$$

Løsning: Skriv om til

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Taylorrekka for $\sin x$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Dette blir derfor: $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{32}$$

2017 oppgave 3

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln(n)}{n}$: konv. eller div. ?

Løsning: ser $a_n \to 0$. , alternerende.

$|a_n|$ avtagende? $|a_n| = \frac{\ln n}{n}$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \quad \text{for } x > e$$

Derfor er rekka konvergent (testen for alternerende rekker)

b) Finn $s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{(n+1) 4^{n+1}}$

Løsning: $\pi s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{n+1} = S\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Vi setter $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad (S(0) = 0)$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{(geometrisk)}$$

$$S(x) = -\ln|1-x| + C$$

$x=0$: $\quad 0 = -\ln 1 + C \Rightarrow C = 0$

$$S(x) = -\ln|1-x|$$

$$\pi s = S(\tfrac{\pi}{4}) = -\ln|1-\tfrac{\pi}{4}|$$

$$\underline{\underline{s = -\frac{1}{\pi}\ln(1-\tfrac{\pi}{4})}}$$

Konvergensområde for $S(x)$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+2}}{n+2}}{\frac{x^{n+1}}{n+1}}\right| = \left|x\frac{n+1}{n+2}\right| \to |x|$$

Konvergens (absolutt) når $|x|<1$.

$S(\frac{\pi}{4})$ eksisterer siden $|\frac{\pi}{4}|<1$.