5.11 Gradientmetoden er en numerisk metode for å finne (tilnærming til) minimum av $f(\vec{x})$.

Siden $-\nabla f(\vec{x})$ peker i den retningen f avtar raskest, prøver vi

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - t\nabla f(\vec{x}_n) \quad \text{(gradientmetoden)}$$

der $t>0$, og $\vec{x}_n$ er forrige tilnærming til minimum.

Lurt valg for t: t bør oppfylle at

$$f(\underbrace{\vec{x}_n - t\nabla f(\vec{x}_n)}_{\vec{r}(t)}) \text{ er minst mulig}$$

Vi kan bruke kjerneregelen på $g(t) = f(\vec{r}(t))$ for å finne dette min.

$$g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

$$= \nabla f(\vec{x}_{n+1}) \cdot (-\nabla f(\vec{x}_n))$$

$$= -\nabla f(\vec{x}_{n+1}) \cdot \nabla f(\vec{x}_n) = 0$$

Konklusjon: Finn t s.a.

$$\nabla f(\underbrace{\vec{x}_{n+1}}_{\vec{x}_n - t\nabla f(\vec{x}_n)}) \cdot \nabla f(\vec{x}_n) = 0$$

(Kan være vanskelig å løse).

Quiz kapittel 5

1. Newtons metode på $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

med $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{F}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}'(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{F}'(\vec{x}_0)^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'(\vec{x}_0)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = x_0 - (\vec{F}'(\vec{x}_0))^{-1}\vec{F}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Oppgave 2

$\vec{F}$ har en omvendt funksjon definert på en omegn om $(0,3)$ siden $\vec{F}(1,1) = (0,3)$, og $\vec{F}'(1,1)$ er inverterbar.

Videre er $\vec{G}'(0,3) = (\vec{F}'(1,1))^{-1}$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3

$$f(x,y,z) = x^4 + y^2 z^2 + z^4 - 3 = 0$$

ser at $f(1,1,1) = 1+1+1-3 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2y^2 z + 4z^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 2 + 4 = 6 \neq 0$$

Vi kan nå bruke implisitt funksjonsteorem med $g(1,1) = 1$, og

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{4x^3}{2y^2 z + 4z^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2yz^2}{2y^2 z + 4z^3}$$

Oppgave 4

$f(x,y,z) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2y^3 - 15y^2 + 36y$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x^2 - 18x + 12 \\ 6y^2 - 30y + 36 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 6x^2 - 18x + 12 &= 0 \quad (*1) \\ 6y^2 - 30y + 36 &= 0 \quad (*2) \end{aligned}$$

$(*1) \quad x = \dfrac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{12} = \dfrac{18 \pm 6}{12} = 2$ eller 1

$(*2) \quad y = \dfrac{30 \pm \sqrt{900 - 864}}{12} = \dfrac{30 \pm 6}{12} = 3$ eller 2

4 mulige kombinasjoner: $(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)$

Oppgave 5

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 18 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y - 30$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x - 18 & 0 \\ 0 & 12y - 30 \end{pmatrix}$$

Oppgave 6

$$Hf(2,2) = \begin{pmatrix} 12\cdot 2-18 & 0 \\ 0 & 12\cdot 2-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$D = 6\cdot(-6) = -36.$

Annenderiverttesten: $(2,2)$ er et sadelpunkt.

(egenverdiene er $6, -6$, kan også slutte fra det at $(2,2)$ er et sadelpunkt.

Oppgave 7

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$
$$g(x,y,z) = (x-2)^2+y^2+z^2-1 = 0$$

Omformulering: Finn punkter på kula med sentrum $(2,0,0)$ med radius 1, med størst/minst avstand til origo.

Klart at vi her har globale maks/min, siden kuleskallet er lukket og begrenset.

1. $\nabla g = \vec{0}$? $\quad \nabla g = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

Ser at $\nabla g = \vec{0}$ kun hvis $x=2$, $y=0$, $z=0$, men punktet $(2,0,0)$ er senteret i kula, som ikke oppfyller betingelsen. Ingen kandidater.

2. $\nabla f = \lambda \nabla g$: $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

4 likninger med 4 ukjente:

$$x = \lambda(x-2)$$
$$y = \lambda y$$
$$z = \lambda z$$
$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Anta $y \neq 0$: Likning 2 gir da $\lambda = 1$.
Innsatt i likning 1 gir dette $x = x-2$,
umulig. Derfor må $y = 0$.
$z = 0$ følger på samme måte.

$y = z = 0$ innsatt i likning 4 gir $(x-2)^2 = 1$,
slik at $x = 1$ eller $x = 3$.
(λ blir da $\lambda = \frac{x}{x-2}$, fra første likning).
To kandidater: $(1,0,0)$ og $(3,0,0)$
Vi sammenligner: $f(1,0,0) = 1$ globalt min.
$f(3,0,0) = 9$ globalt maks